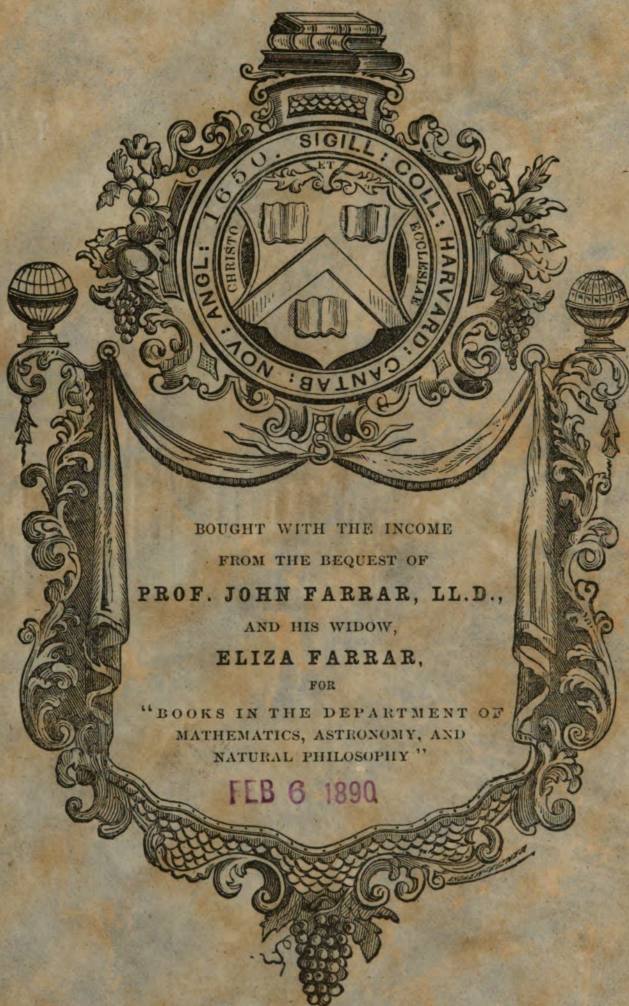
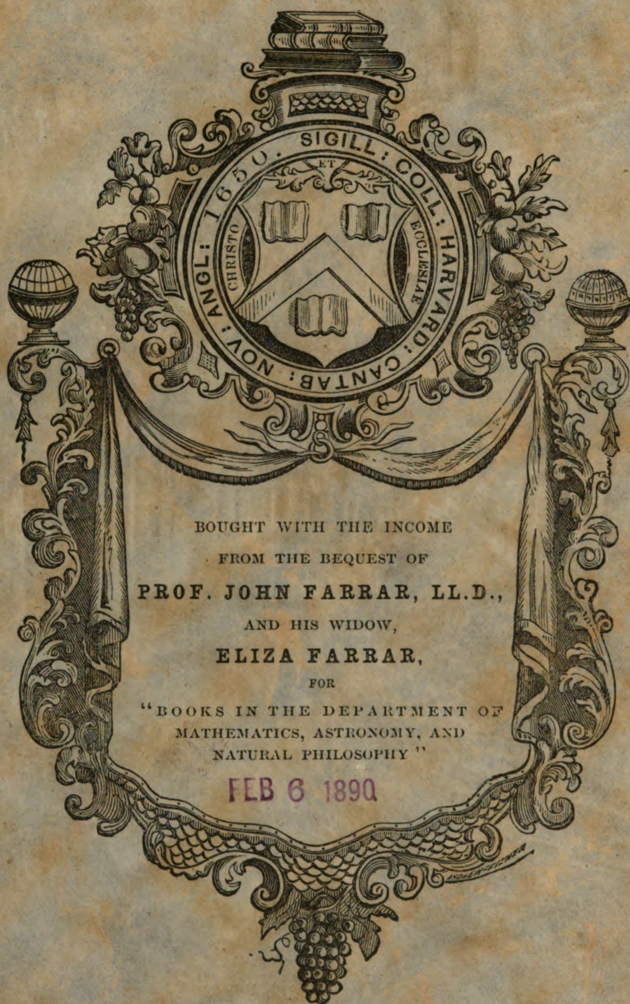



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE

A LA SCIENCE DES NOMBRES.

DU MÊME AUTEUR :

1° A la même librairie :

Exposition élémentaire de la Théorie mécanique de la chaleur 1867

Note sur le Mouvement d'un point matériel dans les sections coniques (comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 3 août).................................. 1868

De l'Esprit des Mathématiques supérieures............ 1873

Problèmes de Physique, de Chimie, etc............... 1884

2° Dans les Mémoires de la Société des Sciences et Arts de Vitry-le-François :

Notice sur Moivre, et sur la découverte de sa formule.. 1867

Notice sur la vie et les travaux mathématiques de R. P. Jacquier, de l'ordre des Minimes.... 1868

Sur le Mouvement d'un point matériel dans les sections coniques................. 1869

Discours prononcé sur la tombe d'Alphonse Picart, docteur ès sciences, ancien député 1884

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE

A LA SCIENCE DES NOMBRES;

INTERPRÉTATION DES THÉORÈMES

ET DES DISCUSSIONS DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

AU MOYEN DE LA GÉOMÉTRIE DES COURBES,

A L'USAGE DES CANDIDATS AUX BACCALAURÉATS OU AUX ÉCOLES
DU GOUVERNEMENT, ET DES ASPIRANTES AU PROFESSORAT
DANS LES LYCÉES OU COLLÈGES DE JEUNES FILLES,

PAR EDME JACQUIER.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
De l'Ecole polytechnique, du Bureau des Longitudes,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1888

A MESSIEURS LES LICENCIÉS ÈS SCIENCES

DES COLLÈGES,

Hommage de leur ancien délégué au Conseil supérieur de l'Instruction publique (1880-1884).

JACQUIER.

AVERTISSEMENT.

Dans l'antiquité, l'arpentage a été le point de départ de la géométrie. Il serait encore bon aujourd'hui de placer la mesure des aires le plus près possible des premiers principes de cette science, puisque les figures rectangulaires expriment des relations numériques. La géométrie était si importante pour les anciens, et même pour les modernes, qu'elle a donné son nom à la science mathématique tout entière. On lui demanda de bonne heure la connaissance des propriétés des nombres. Au 2e siècle de notre ère, Ptolémée avait démontré par une construction graphique que, si l'on multiplie la somme de deux nombres par leur différence, on obtient la différence de leurs carrés. Diophante, deux siècles après, se servit de ce théorème pour résoudre des problèmes numériques qui dépendent pour nous d'une équation du second degré ; c'est ce qui l'a fait regarder comme l'inventeur de l'algèbre. Mais il y a loin sans doute de sa méthode analytique aux formules générales des modernes. Le savoir des Grecs a été beaucoup dépassé au moyen âge par celui des Indiens et des Arabes. Leur algèbre, constamment

unie à la géométrie, était purement numérale ; ils représentaient les lignes de leurs figures par des nombres particuliers ; ils s'exposaient peut-être à perdre la trace du raisonnement, mais comme ils allaient du concret à l'abstrait, leur méthode paraissait plus facile. Elle a été suivie au 16e siècle par Lucas di Burgo, Cardan, Tartaglia qui ont fait faire à l'algèbre, ars magna, des progrès rapides ; Viète opéra une importante révolution en introduisant l'usage des lettres dans cette science qu'il appela logistique spécieuse, et à laquelle Newton devait plus tard donner le nom d'arithmétique universelle. Enfin Descartes illustra l'union de l'algèbre et de la géométrie en appliquant l'analyse de Viète à la théorie des courbes.

De notre temps, l'algèbre s'est séparée progressivement de sa sœur aînée la géométrie ; les auteurs des livres élémentaires se sont toujours efforcés de maintenir dans leurs traités spéciaux la séparation des diverses sciences, comme si chacune d'elles dût se dégrader au contact d'une rivale. En réalité, les diverses branches de la science mathématique sont étroitement unies, et se prêtent un mutuel secours, dans l'invention ou dans l'exposition de la vérité. L'auteur du programme d'algèbre pour l'enseignement secondaire des jeunes filles paraît avoir eu le sentiment de cette solidarité, lorsqu'il y a introduit l'étude de la variation des fonctions les plus simples au moyen des courbes. On se propose ici de remplir ce cadre en l'élargissant. Il ne s'agit pas, bien entendu, d'aborder les théories générales de la géométrie analytique. On devra se placer à un point de vue plus particulier. On ne fera usage

que des éléments de la géométrie et de l'algèbre, sans jamais recourir à la trigonométrie ni aux dérivées. D'importants théorèmes sur les nombres peuvent être figurés et même démontrés au moyen du dessin graphique. De plus, des discussions de formules, très-ardues et très-abstraites, présentent de véritables difficultés, puisque les divers auteurs ne s'en tirent pas toujours de la même manière. La géométrie des courbes donne un sens précis à chaque question, et de la fermeté à la conclusion. La philosophie naturelle profitera elle-même de cette méthode ; en effet, toute loi physique, exprimée par une équation indéterminée, peut être figurée par une courbe qui représente la marche d'un phénomène.

On a voulu faire de l'algèbre au moyen de la géométrie ; mais l'algèbre n'a rien perdu de ses droits ; il a bien fallu montrer par la variété des méthodes, la souplesse et la puissance de cet instrument. Des exercices faciles, trop faciles, peut-être, font comprendre la théorie ; des questions plus difficiles en sont ensuite l'application.

Cet écrit est un complément aux mathématiques élémentaires, une introduction aux mathématiques spéciales. En le composant, l'auteur a appris plus d'une chose ; puisse le lecteur, en le parcourant, faire la même réflexion pour lui-même. L'illustre Dumas, présentant à l'Académie le traité de chimie de l'un de ses élèves dit : « Je n'y ai rien trouvé à reprendre, et j'y ai appris quelque chose. » Heureux l'auteur qui mérite et qui obtient un pareil éloge d'un tel maître. Mais il est

sage de solliciter les sévérités de la critique, et de dire avec Socrate : « Il n'y a pas de plus grand bien que celui de se délivrer d'une idée fausse. »

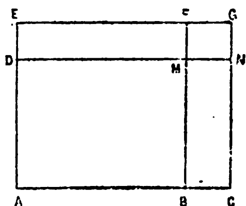
APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE

A LA SCIENCE DES NOMBRES.

CHAPITRE I.

Démonstration géométrique de quelques propositions sur les nombres.

1. Legendre a placé avec raison au commencement de ses éléments de géométrie la mesure des surfaces que d'anciens auteurs rejetaient dans la géométrie pratique.



Désignons chacun des rectangles de la figure 1, par les lettres de deux sommets opposés ; on aura

$$AG = AM + BN + DF + MG$$

On sait que si l'on prend pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur, tout rectangle est égal au produit de sa base par sa hauteur. Supposons que la valeur numérique de A B soit a, et que l'on ait ainsi pour chaque ligne de la figure

$$AB = a$$
$$BC = h$$
$$AD = b$$
$$DE = k$$

l'égalité primitive devient :

(1) $$(a + h)(b + k) = ab + bh + ak + hk$$

Ce qui démontre que pour multiplier un binôme par un binôme, il faut multiplier chaque terme du multiplicande par chaque terme du multiplicateur, en faisant la somme des produits partiels.

Supposons maintenant que l'on ait

$$AC = a,$$
$$AE = b;$$

On peut écrire :

$$AM + BG + DF = AG$$

ou bien

$$AM + BG + DG - MG = AG$$

Or on peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres de l'égalité ; on aura donc

$$AM = AG - BG - DG + MG$$

et par suite

$$(a - h)(b - k) = ab - bh - ak + hk$$

Ainsi pour multiplier entre eux deux binômes dont les seconds termes sont négatifs, on multiplie encore chaque terme du multiplicande par chaque terme du

multiplicateur ; mais dans la somme algébrique des produits partiels, chacun d'eux a le signe + si ses facteurs ont le même signe, et le signe —, si ses facteurs ont des signes contraires.

L'égalité ([1]) comprend ce dernier résultat si l'on suppose que h et k puissent y avoir implicitement le signe moins.

2. Cette formule est très importante.

On peut écrire successivement :

$$(a+h)(b+k)-ab = bh + ak + hk$$

$$\frac{(a+h)(b+k)-ab}{ab} = \frac{h}{a} + \frac{k}{b} + \frac{h}{a} \times \frac{k}{b}$$

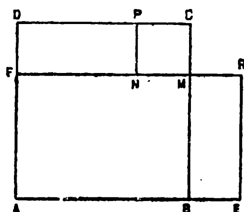
Si l'on suppose que les facteurs du produit ab soient altérés par excès, par exemple, et si l'on entend par erreur relative, le quotient de l'erreur absolue divisée par le nombre exact, comme on suppose ici les différences h et k très-petites, le produit $\frac{h}{a} \times \frac{k}{b}$ sera extrêmement petit, et négligeable dans la pratique ; on voit que l'erreur relative du produit ab est égal à la somme des erreurs relatives de ses facteurs.

On pourrait tirer de la même égalité la règle qui donne la dérivée du produit de deux fonctions, si cette question était plus élémentaire. Mais voici un petit problème de calcul mental. On veut obtenir le produit approché P' de 7,25 par 12,75. On peut écrire

$$\begin{aligned} P' &= 7 \times 12 + 0{,}25 \times 12 + 7 \times 0{,}75 \\ &= 84 + 3 + 5{,}25 = 92{,}25 \end{aligned}$$

Cette règle est d'une application continuelle dans le commerce. Dans cet exemple l'erreur commise est $0,25 \times 0,75$, ou $0,1875$.

On aperçoit déjà la fécondité de la formule démontrée au n° 1. De plus elle comprend comme cas particuliers celles qui seront établies dans les trois numéros suivants, et qu'on pourrait en tirer par le calcul ; mais il est bon de les établir directement par la géométrie.



3. Considérons le carré A B C D dont le côté est égal à a. Soit P C $= BE = DF = h$. Le rectangle A R a pour base $a + h$, et pour hauteur $a - h$. Si l'on prend deux expressions de la figure totale, on aura

$$AR + FP + NC = AC + BR$$

Les rectangles F P et B R sont égaux. On a donc

$$AR = AC - NC$$

En remplaçant chaque figure rectangulaire par le produit de ses dimensions, on aura :

$$(a + h)(a - h) = a^2 - h^2$$

Le rectangle construit sur la somme et la différence de deux droites, est égal à la différence des carrés faits sur ces droites ; par conséquent, la somme de deux nombres, multipliée par leur différence, donne un produit égal à la différence des carrés de ces nombres. Ptolémée connaissait ce théorème, mais sans le traduire en formule.

Le contour du carré A C est $4a$; celui du rectangle A R est $2(a+h)+2(a-h)$; il est donc lui-même égal à $4a$ quel que soit h. La figure montre aux yeux, que le carré est le plus grand de tous les rectangles de même contour, car il surpasse chacun d'eux du carré N C ; or chacun de ces rectangles est le produit de deux facteurs dont la somme est constante et égale à $2a$; le produit maximum a donc lieu lorsque les facteurs sont égaux.

4. Supposons que dans la figure du n° 1, l'on ait

$$AD = AB = a$$
$$DE = BC = h$$

On voit immédiatement l'identité

$$(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

Ainsi, le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus deux fois le produit du premier multiplié par le second, plus le carré du second.

Supposons maintenant que l'on ait

$$AC = AE = a$$

Nous avons établi l'égalité

$$AM = AG - BG - DG + MG$$

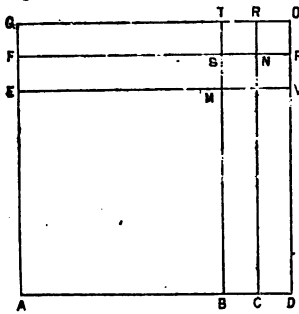
elle donne

$$(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2$$

Le carré de la différence de deux nombres ne diffère du carré de la somme de ces nombres que par le signe du double produit.

Cette application de la géométrie à l'arithmétique était connue de Théon d'Alexandrie. Legendre a soin

de faire remarquer que chaque proposition de géométrie revient à une formule équivalente d'algèbre.



5. Supposons que l'on ait dans la figure rectangulaire

$AC = a = AF$

$BC = CD = EF = FG = h$

On peut écrire

$$AO - AM = BN + CP + FR + ES + NO$$

Le rectangle E S augmenté du carré N O, substitué au carré M N, donne le rectangle E N égal à chacun des précédents ayant pour dimension a et h. On a donc

$$AO - AM = 4\,BN$$

ou bien

$$(a + h)^2 - (a - h)^2 = 4\,ah$$

Le carré de la somme de deux nombres, diminué du carré de leur différence, est égal à 4 fois le produit de ces nombres.

6. Rapprochons maintenant tous ces résultats :

(1) $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

(2) $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$

(3) $(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$

(4) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4\,ab$

Ces formules ont été établies directement par la géométrie. On sait d'ailleurs que l'on peut les démon-

trer au moyen de la multiplication algébrique dont la règle a été donnée au n° 1. Chacune d'elles recevra plus loin des applications importantes.

Les formules (3) et (4) se supposent mutuellement. En effet : posons

$$a + b = m,\ a - b = n,\ \text{d'où}\ a = \frac{m+n}{2},\quad b = \frac{m-n}{2};$$

La formule (3) devient

$$mn = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

ou bien $\quad 4mn = (m+n)^2 - (m-n)^2$

c'est la formule (4).

Inversement, introduisons dans la formule (4) la même notation $a + b = m$, $a - b = n$; elle donne

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

c'est la formule (3).

Reprenons la formule (4), et posons $a = m^2$, $b = n^2$ afin que le second membre soit un carré parfait ; il vient

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

Cette égalité exprime une règle connue des Indiens au 6e siècle.

Si l'on veut résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$z^2 = x^2 + y^2$$

on posera

$$z = m^2 + n^2$$
$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$

Il suffira de prendre pour m et n des nombres entiers quelconques. Par exemple

Si $m = 2$, et $n = 1$, on a

$z = 5$, $x = 3$, $y = 4$

ce sont les côtés du triangle rectangle égyptien.

Dans la grande pyramide, la demi-diagonale de la base est de 120ᵐ, la hauteur de 160ᵐ, et l'arète de 200ᵐ, d'après Letronne, qui n'en connaissait pas d'ailleurs la raison géométrique.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DE LA LIGNE DROITE ET DES SECTIONS CONIQUES.

7. Une équation à deux inconnus, telle que $xy = m^2$, admet une infinité de solutions. En effet, si on la résout par rapport à y, on obtient

$$y = \frac{m^2}{x}$$

et si l'on donne à x une valeur quelconque, entière ou fractionnaire, positive ou négative, on obtient pour y une valeur correspondante. Ainsi, lorsque la quantité x varie d'une manière arbitraire, y varie en même temps suivant une loi exprimée par l'équation. Dans cette hypothèse, x est une variable indépendante et y une variable dépendante de x.

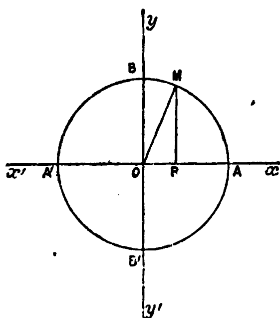
En général, lorsqu'une quantité y dépend d'une autre quantité x suivant une loi exprimée ou non par l'algèbre, on dit que y est une fonction de x, ce que l'on indique par le symbole $y = \mathrm{F}(x)$.

Dans l'équation $xy = m^2$, m étant un coefficient constant, si la variable x représente le volume d'une masse de gaz à une température constante, la fonction y représente la force élastique de ce gaz qui varie en raison inverse de son volume suivant la loi de Mariotte. Nous retrouverons plus loin cette célèbre fonction.

8. La loi exprimée par une équation à deux varia-

bles peut être figurée par une courbe, et réciproquement une courbe ou lieu géométrique peut être représentée par une équation indéterminée F $(x, y) = o$

Prenons pour exemple la circonférence du cercle.



Menons par le centre deux axes rectangulaires $x x'$ et $y y'$; puis d'un point quelconque M, abaissons sur l'axe $o x$ la perpendiculaire M P ; le point M sera déterminé par l'abscisse O P et par l'ordonnée M P qui sont les deux coordonnées du point M. Ces éléments sont analogues à la longitude et à la latitude géographiques imaginées par Hipparque dix-huit siècles avant l'application de l'algèbre à la géométrie des courbes. Désignons l'abscisse variable par x et son ordonnée par y, on aura pour le cercle de rayon a, l'équation

$$x^2 + y^2 = a$$

On en tire

$$y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

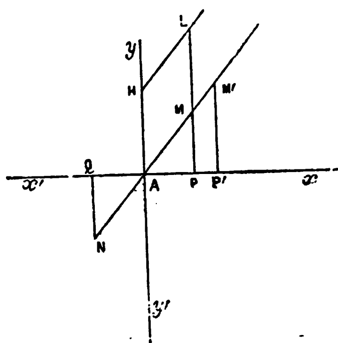
Discutons cette formule.

Pour $x = o$, $y = \pm a$. La valeur positive de y donne le point B ; la valeur négative $-a$ donne le point B' situé au-dessous de l'axe $x' x$: de même, les abscisses positives seront comptés sur $o x$, vers la droite ; et les abscisses négatives le seront sur $o x'$, vers la gauche.

Si x augmente, y diminue en valeur absolue, et pour $x = a$, on a $y = o$, ce qui donne le point A. Si l'on faisait croître x au-delà de $+ a$, y deviendrait imaginaire.

Mais on peut donner à x des valeurs négatives comptées vers la gauche de l'origine o. On peut prendre pour x toute valeur comprise entre o et $-a$; car son carré restera positif, et y passera par les mêmes valeurs absolues que précédemment de manière à produire l'autre demi-circonférence B A′ B′.

9. Considérons maintenant une ligne droite A M qui passe par l'origine des coordonnées. Admettons que pour la déterminer par le point M′, on ait pris une abscisse A P′ égale à 4 parties, et une ordonnée P′ M′ égale à 5 de ces parties. Les triangles semblables A M P et A M′ P′ nous montrent que le rapport de toute ordonnée M P à son abscisse A P. sera égal à $\frac{5}{4}$. On aura donc pour l'équation de la droite



$$y = \frac{5}{4} x.$$

Elle est de la forme $y = a x$, dans laquelle a représente un nombre constant.

Si l'on prend A Q = A P, l'ordonnée N Q sera égale à l'ordonnée M P, en valeur absolue. La distance A M est égale à la distance A N ; les points M et N sont symétriques par rapport à l'origine.

Si l'on prend A H égale à 3, et si par le point H on mène une parallèle à M A, toutes ses ordonnées seront

égales à celles de la première augmentées de 3. Son équation sera donc

$$y = \frac{5}{4} x + 3$$

En général l'équation d'une droite peut être mise sous la forme $y = ax + b$.

Lorsqu'il s'agit de la droite A M M' qui passe par l'origine, le coefficient a désigne le rapport de y à x ; si l'angle M A P augmente, ce rapport lui-même augmente ; le multiplicateur a est le *coefficient angulaire* de la droite. Si l'on a $a = 1$ ou bien $y = x$, la droite est bissectrice de l'angle y A x. L'équation $y = -x$ représente la bissectrice de l'angle x A y'.

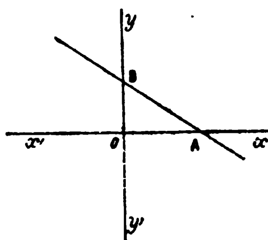
L'équation $y = -2x$ exige que si x est positif, y soit négatif ; la droite est donc située dans le même angle x A y' et dans l'angle y A x' qui lui est opposé par le sommet.

10. L'équation la plus générale de la ligne droite est de la forme

$$Ax + By = C$$

Si l'on suppose que B soit nul, on a $x = \frac{C}{A}$; c'est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y ; l'abscisse est constante, et l'ordonnée est indéterminée. On verrait de même que pour $A = o$, l'équation $y = \frac{C}{B}$ représente une parallèle à l'axe des x.

Supposons que les coefficients A, B, et C soient positifs, et cherchons les points où la droite coupe les axes.



Pour

$y = o$, on a $x = \frac{C}{A} = OA = a$

ce qui donne le point A.

Pour

$x = o$, on a $y = \frac{C}{B} = OB = b$

ce qui donne le point B.

Les quantités désignées par a et b sont dites les segments à l'origine, c'est-à-dire les segments des axes déterminés par la droite A B.

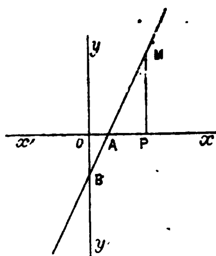
On a $A = \frac{C}{a}$ et $B = \frac{C}{b}$; par substitution, l'équation de la droite est $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Revenons à la première forme de l'équation générale.

On peut écrire $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$

Le coefficient angulaire est négatif, ce qui montre que la parallèle menée par l'origine o, est située dans l'angle $y\,o\,x'$.

Considérons en particulier l'équation $y = 2x - 1$



Pour $x = o$, $y = -1 = -o$ B

Pour $y = o$, $x = \frac{1}{2} = o$ A

Supposons que O P soit toujours un nombre entier ou que les différentes valeurs de x soient

$1, 2, 3, \ldots . n$;

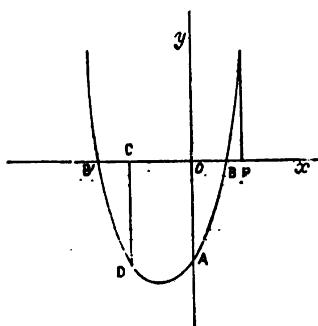
l'ordonnée M P sera un nombre impair $2x - 1$, dont le rang est x dans la série précédente. Si l'on ne considère que les valeurs entières

des abscisses, les ordonnées correspondantes représenteront la suite des nombres impairs.

11. Descartes paraît avoir eu le premier l'idée de représenter la ligne droite par une équation et de rapporter aux mêmes axes de coordonnées chacune des sections coniques, sa tangente, sa normale, et toute autre ligne jouant un rôle dans une même théorie. Cette généralisation est le caractère de la géométrie analytique, inventée par ce grand géomètre. Il fit à cette occasion une autre découverte en algèbre. Avant lui, quand l'application d'une formule générale donnait pour l'inconnue une valeur négative, on la rejetait comme fausse. Il montra que toute racine négative répondait à la question pourvu qu'on portât sa valeur absolue en sens contraire.

Contruisons par exemple la courbe dont l'équation est

$$y = x^2 + 2x - 3.$$



Pour $x = o$, on a $y = -3 = -OA$ ce qui donne le point A.

Pour $y = -3$, on a $x(x+2) = o$, et par suite $x = -2 = -OC$; ce qui donne le point D.

Pour que l'ordonnée y soit nulle, il faut que le trinome soit lui-même égal à zéro.

Soit l'équation $x^2 + 2x - 3 = o$

Ses racines sont $x' = -3$, et $x'' = 1$

Nous écrirons avec Descartes $x'' = 1 = OB$ et

$$x' = -3 = -OB'.$$

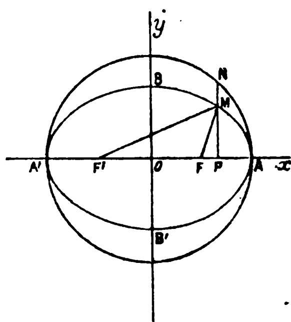
Voici un moyen de montrer l'excellence de cette convention.

La distance de deux points P et B est égale à la différence des abscisses O P et O B. En sera-t-il de même si l'on considère deux points situés l'un à droite, et l'autre à gauche de l'origine ?

On a $BB' = OB + OB' = x'' - x'$.

La règle est donc générale et d'une application continuelle.

12. L'ellipse est une courbe plane telle, que la somme des rayons vecteurs, c'est-à-dire, des distances de chacun de ses points à deux points fixes appelés foyers est une quantité constante que nous représenterons par $2a$.



La distance F F' des foyers est égale au double de l'excentricité absolue O F, représentée par c, et qui se distingue de l'excentricité relative $\frac{c}{a}$, désignée par e.

Menons l'axe des x par les foyers, et l'axe des y par le milieu de F F'. Pour un point quelconque de la courbe on aura $FM + F'M = 2a$. On satisfera à cette condition en posant $F'M = a + z$, $FM = a - z$. Les triangles rectangles M P F' et M P F donnent

$$(1) \qquad (a+z)^2 = (x+c)^2 + y^2$$
$$(a-z)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Par soustraction et réduction, on a

$$a z = c x$$

ou $$z = \frac{c x}{a}$$

Ce qui donne pour les rayons vecteurs

$$\mathrm{F'M} = a + \frac{c x}{a}, \quad \mathrm{FM} = a - \frac{c x}{a}.$$

En substituant la valeur de z dans l'équation (¹) on obtient

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = \left(c + x\right)^2 + y^2$$

d'où l'on tire aisément

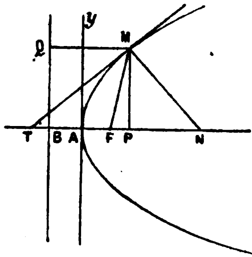
$$a^2 y^2 + (a^2 - c^2) x^2 = a^2 (a^2 - c^2)$$

et si l'on pose $a^2 - c^2 = b^2$, l'équation de l'ellipse devient $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$

d'où $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$

En discutant cette formule comme celle du cercle, on reconnaît la forme de la courbe. Comparons l'ellipse au cercle de rayon a qui en est un cas particulier pour lequel $b = a$. Le rapport de l'ordonnée M P de l'ellipse à l'ordonnée N P de ce cercle, pour la même abscisse, est constant, et égal à $\frac{b}{a}$, ce qui permet de trouver différents points de la courbe. Lorsqu'on veut établir cet important théorême par la géométrie des anciens, on est obligé de passer par une longue suite de propositions, ce qui rend la démonstration beaucoup plus difficile.

13. La parabole est une courbe plane telle que chacun de ses points est également éloigné d'un point fixe appelé foyer, et d'une droite appelée directrice.



Soient B Q la directrice et F le foyer. Le milieu A de leur distance p est sur la courbe. Prenons ce point pour origine des coordonnées rectangulaires et AF pour la direction de l'axe des abscisses. On aura

$$MQ = \frac{p}{2} + x, MF = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$$

Si on égale les carrés de ces deux valeurs, on obtient

$$y^2 = 2\,p\,x,$$

résultat déjà connu par la géométrie élémentaire.

Telle est l'équation de la parabole rapportée à son axe A X et à son sommet A. On en tire

$$y = \pm \sqrt{2\,p\,x}$$

Le double signe montre que la courbe est symétrique par rapport à l'axe A X. L'abscisse n'admet pas de valeurs négatives, mais peut croître de zéro à l'infini positif, et y varie de zéro à $\pm$ l'infini de sorte que la courbe est illimitée.

L'équation $y^2 = 2\,p\,x$ contient toutes les propriétés de la parabole ; on pourrait aisément les en déduire au moyen de l'algèbre.

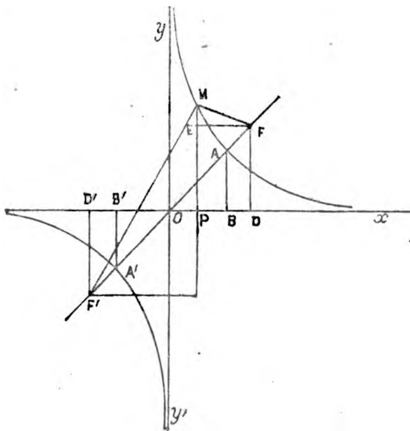
14. L'hyperbole est une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points

fixes appelés foyers est constante. Représentons par $2c$ la distance des foyers supposée plus grande que $2a$, différence des rayons vecteurs, et posons $c^2 - a^2 = b^2$. Si nous employons la méthode appliquée à l'ellipse, les rayons vecteurs seront $z + a$, et $z - a$, et l'équation de l'hyperbole

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

ne diffèrera de la précédente que par le signe de b^2.

Mais il faut remarquer avec Descartes qu'une même courbe peut être représentée par des équations différentes suivant le choix des axes des coordonnées (n° 66).



Plaçons les foyers F et F′ sur la bissectrice de l'angle yox. Soit $OD = DF = a$.

Par hypothèse

$$MF' = z + a,$$
$$MF = z - a$$

de sorte que la différence des rayons vecteurs est bien égale à une constante $2a$. L'hypothèse $OD = DF = a$ caractérise une hyperbole particulière, l'hyperbole équilatère dont nous allons trouver l'équation. Les triangles rectangles F′ E′ M, et F E M donnent

$$(y + a)^2 + (a + x)^2 = (z + a)^2$$
$$(y - a)^2 + (a - x)^2 = (z - a)^2$$

Si l'on retranche ces égalités membre à membre, on obtient

$$x + y = z$$

En mettant cette valeur de z dans la première équation, on a enfin

$$xy = \frac{a^2}{2} \text{ ou } y = \frac{a^2}{2x}$$

Nous avons déjà cité cette équation (n° 7).

Soit $x = y$, ce qui donne $x^2 = y^2 = \frac{a^2}{2}$

et par suite $x = y = \frac{\pm a}{\sqrt{2}}$; $x' = + \text{O B}$, $y' = \text{B A}$

$x'' = -\text{O B}'$, $y'' = -\text{B A}'$

On a $\text{O A}^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$ ou bien $\text{O A} = a$.

Les points A et A' sont les sommets de la courbe.

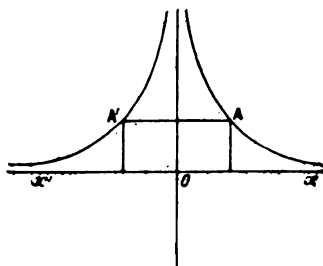
Si à partir de $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \text{O B}$, on fait croître x progressivement, la distance y d'un point M de la courbe à l'axe des x va en diminuant ; si on donne à x une valeur immense, celle de y sera extrêmement petite, et diffèrera de zéro d'aussi peu qu'on voudra ; mais, si grande que soit celle de x, la distance y ne sera jamais nulle ; la courbe se rapproche donc de plus en plus de la droite, sans jamais la rencontrer ; on dit que cette droite est une asymptote à la courbe. Lorsque pour une valeur de x extrêmement grande, mais finie et déterminée, la distance y est devenue extrêmement petite, si on augmente encore progressivement la valeur de x, celle de y ne varie plus d'une manière ap-

3

préciable, tant elle est voisine de sa limite zéro ; la forme de la courbe se modifie très peu, car cette courbe est devenue à peu près rectiligne comme son asymptote. Si l'on suppose enfin que la distance x croisse au-delà de toute limite, on dit que pour $x = \infty$, $y = o$. Si toujours à partir de $x = OB$, on fait décroître la valeur de x, celle de y augmente ; supposons que x ait une valeur h extrêmement voisine de zéro, y aura une très grande valeur N ; si ensuite on pose $x = \frac{h}{100}$, par exemple, on aura $y = N \times 100$. Comme le pied de l'ordonnée est extrêmement voisin de l'origine, la grande variation de y ne modifiera plus sensiblement la forme de la courbe, qui s'avance dans la direction de la droite $o\,y$. Si l'on fait $x = o$, la valeur de y surpasse toute quantité si grande qu'elle soit ; on exprime ce résultat par le symbole $y = \infty$.

Si dans l'équation $y = \frac{a^2}{2\,x}$, on pose successivement $x = +\,h$, et $x = -\,h$, h désignant une quantité infiniment petite, on a $y = +\,N$, ou $y = -\,N$. Lorsque x change de signe en passant par zéro, y passe d'une valeur positive N à une valeur négative — N dont la différence 2 N est infiniment grande ; on dit que pour $x = o$, $y = \pm \infty$. Lorsque x varie de $2\,h$, y varie brusquement de 2 N ; la fonction, dans le voisinage de $x = o$, cesse d'être continue.

15 L'infini ne doit pas toujours être affecté du double signe.



En effet, soit la fonction $y = \frac{1}{x^2}$. Elle est essentiellement positive.

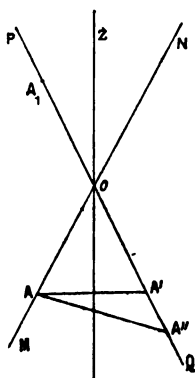
Pour $x = \pm 1$, $y = 1$ ce qui donne les points A et A'. Pour $x = \pm \infty$, $y = o$; l'axe $x'x$ est une asymptote.

Pour $x = \pm \alpha$, α étant infiniment petit, y a une valeur positive immense, et pour $x = o$, $y = + \infty$; la seconde asymptote est l'axe des ordonnées positives pour les deux branches de la courbe.

16. Lorsqu'une équation à deux variables est du second degré, elle représente une ellipse, ou un cercle, qui en est un cas particulier, ou une parabole, ou une hyperbole. Si la courbe est fermée, c'est une ellipse ou un cercle. Lorsqu'elle présente une seule branche ouverte et infinie, c'est une parabole. Enfin si la courbe se dédouble en deux branches qui s'étendent à l'infini, c'est une hyperbole.

Ces courbes sont identiques avec les sections coniques imaginées par Platon, On coupait alors la surface du cône par un plan perpendiculaire à l'arête, ce qui nécessitait l'emploi de trois sortes de cônes : le cône acutangle donnait l'ellipse ; le cône rectangle donnait la parabole ; enfin le cône obtusangle produisait l'hyperbole.

Apollonius obtint les diverses courbes sur un cône unique, en menant le plan par un même point de l'arête, mais en faisant varier l'inclinaison. On peut s'en ren-



dre compte de la manière suivante. Soit zoz' l'axe d'un double cône droit; menons par cet axe un plan qui coupe la surface suivant les généra trices M N, et P Q. Par le point A, menons un plan perpendiculaire à zz' ; la section déterminée par ce plan sur la surface conique sera un cercle. Si l'on fait, suivant la méthode d'Apollonius, tourner le plan sécant autour du point A, de manière à ce que le point A′ arrive par exemple en A″, le diamètre A A′ s'allongera, et la section sera une ellipse. Si le plan est parallèle à la génératrice P Q, la section est une parabole. Si le plan sécant rencontre cette génératrice sur l'autre nappe du cône en un certain point A_1, la courbe est une hyperbole dont les branches sont situées sur les deux nappes du double cône.

C'est à l'occasion de ses recherches sur les coniques qu'Apollonius jeta les premiers fondements de la théorie des points harmoniques, des polaires réciproques et des transversales. Au dix-septième siècle, Desargues, Pascal et Lahire ont été les plus célèbres continuateurs des méthodes de ce grand géomètre.

Platon avait inventé les lieux géométriques « sur le solide », sur le cône. La géométrie de Descartes donna naissance aux coniques sur un plan, au moyen des équations du second degré à deux variables. Wallis le premier, dans un traité analytique de ces courbes, discuta l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = o$$

qui représente une ellipse lorsque la quantité $B^2 - 4AC$ est négative, une hyperbole, lorsque cette quantité est positive, et une parabole, lorsqu'elle est égale à zéro.

Euler devait plus tard obtenir par la même méthode cinq espèces de surfaces dans l'équation générale du second degré à trois variables.

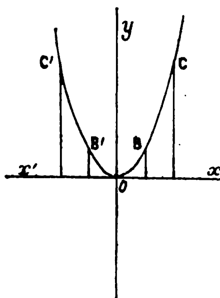
Les géomètres de l'Ecole d'Alexandrie, qui étudiaient les coniques par curiosité, étaient loin de pressentir les brillantes applications qu'on en ferait plus tard au mouvement des corps. Au commencement du dix-septième siècle, Képler reconnut que l'ellipse était l'orbite décrite par chaque planète autour du soleil, et Galilée fit voir que la trajectoire d'un projectile dans le vide serait une parabole. Descartes le premier représenta ces courbes par des équations à deux variables dont les accroissements étaient conçus comme moindres que toute quantité donnée. La considération des rapports de ces accroissements infiniment petits devait bientôt conduire Leibnitz et Newton à l'invention du calcul différentiel. Enfin Newton, en partant des lois de Képler qui régissent le mouvement des planètes, démontra que la force centrale à laquelle elles sont soumises est en raison directe des masses, et en raison inverse du carré des distances. Les géomètres se sont beaucoup occupés de ce théorème. L'auteur du présent travail en a lui-même donné une démonstration analytique très directe (comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 3 août 1868).

CHAPITRE III.

CONSTRUCTION DE QUELQUES PARABOLES.

17. Il convient d'étudier maintenant quelques paraboles dont les équations sont très simples par suite de la position de chaque courbe relativement aux axes des coordonnées. On y trouvera des applications particulières des propriétés du trinome du second degré, et quelques exemples de maximum ou de minimum, qui rendront plus facile l'étude des théories générales.

Soit $y = x^2$. Pour $x = o$, $y = o$; la courbe passe

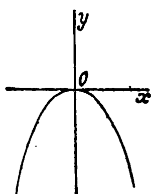


par l'origine des coordonnées. Pour $x = \pm 1$, $y = +1$, ce qui donne deux points symétriques B et B'. Pour $x = \pm 2$, $y = 4$ ce qui donne deux nouveaux points symétriques C et C'; on en trouvera autant qu'on voudra à droite et à gauche de l'axe $o\,y$. Si x prend des valeurs très grandes positives ou négatives, y, toujours positif, deviendra lui-même très grand; pour $x = \pm \infty$, $y = + \infty$. La courbe illimitée, n'ayant qu'une seule branche, est une parabole rapportée à son axe et à son sommet, comme celle du n° 13, étudiée dans le cours élémentaire.

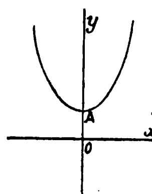
La courbe est convexe vers le bas ; la plus petite valeur de la fonction y est zéro ; le sommet présente un minimum.

La fonction $y = ax^2$ exprime une parabole placée de la même manière que la précédente relativement aux axes rectangulaires. Il est bon de remarquer que si le coefficient a est très petit, pour des valeurs finies de x, l'ordonnée sera très petite ; si a tend vers zéro, la parabole, èn se rectifiant, se rapprochera de plus en plus de l'axe $x'x$.

18. Soit $y = -x^2$. Pour $x = o$, on a encore $y = o$; la courbe passe par l'origine O. Pour toute valeur de x, positive ou négative, y sera toujours négatif.

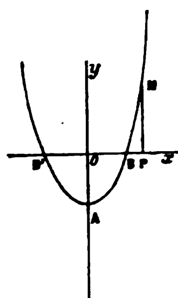


De toutes les ordonnées négatives, la plus grande est celle qui est nulle ; au sommet la courbe arrive à un maximum ; elle est convexe vers le haut et présente un véritable sommet. Dans la parabole précédente le sommet était renversé.



19. La fonction $y = x^2 + 1$ représente une parabole rapportée à son axe, mais non à son sommet. Pour $x = o$, $y = 1 = o$A ; si x augmente en valeur absolue, y augmente dans le sens positif ; pour $x = \pm \infty$ $y = + \infty$. La fonction a sa valeur minimum au sommet A où la courbe est convexe vers le bas.

20. Considérons la fonction $y = x^2 - 1$.

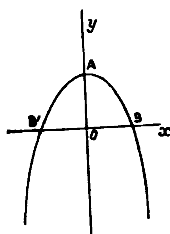


Pour $x = o$, $y = -1 = -o\text{A}$; la courbe coupe l'axe des y au point A.

Si $x = \pm 1$, $y = o$, ce qui donne les points B et B' où la courbe coupe l'axe des x ; pour $x = \pm \infty$, $y = +\infty$ la courbe est convexe vers le bas.

Le sommet A présente le minimum de l'ordonnée ou de la fonction, puisque o A est en valeur absolue la plus grande ordonnée négative. Lorsqu'on égale la fonction à zéro, en posant $x^2 - 1 = o$, les racines sont $x' = -1$, $x'' = 1$; elles sont égales aux abscisses des points B' et B où la courbe coupe l'axe des x. Pour toute valeur de x comprise entre $+1$ et -1, c'est-à-dire entre les racines, la fonction est négative, ou de signe contraire à celui du terme du 2ᵉ degré ; tandis que pour toute valeur de x prise en dehors des racines, la fonction est positive, ou de même signe que ce terme $+x^2$. Ce fait sera généralisé par la théorie.

21. Soit maintenant la fonction $y = 1 - x^2$ qui est la précédente changée de signe.



Pour $x = o$, $y = 1$, ce qui donne le sommet A où la courbe traverse l'axe des y. Si x augmente en valeur absolue, y diminue. Pour $x = \pm 1$, $y = o$; ce qui donne les points B et B' où la courbe coupe l'axe des x ; d'ailleurs ces points sont également éloignés du pied de l'ordonnée du sommet. Remarquons encore que les racines ($x' = -1$, $x'' = +1$) de l'équation $1 - x^2 = o$, sont les abscisses de ces points B' et B. Pour toute

valeur de x comprise entre — 1 et + 1, la fonction est positive ou de signe contraire à celui de son terme du 2e degré ; tandis que pour toute autre valeur prise en dehors des racines, la fonction est négative comme ce même terme.

Dans le cas de la fonction $y = x^2 + 1$ les racines de l'équation $x^2 + 1 = o$ sont imaginaires ; voilà pourquoi la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses ; la fonction ne peut changer de signe ; elle a toujours le signe du terme x^2.

Dans le cas des fonctions $y = x^2$, ou $y = -x^2$, l'équation $x^2 = o$ a ses deux racines égales à zéro. En effet, si l'on avait $y = x^2 - h^2$, l'équation $x^2 - h^2 = o$, aurait pour racines $x' = -h$, $x'' = +h$; et en supposant h infiniment petit, les points B et B' où la courbe traverse l'axe des x seraient infiniment voisins de l'origine. Si l'on fait $h = o$, chacune des racines est nulle, et l'axe des x, qui était une sécante à la courbe, devient tangente au sommet de la nouvelle courbe.

Dans le cas des racines égales, la fonction a toujours le même signe que son terme du second degré. On insistera plus loin sur le théorème général.

Dans chacun des exemples qui précèdent, on voit aisément quelle est la valeur de x qui donne à la fonction sa plus grande ou sa plus petite valeur. Mais le problème du maximum ou du minimum n'est pas toujours aussi simple ; pour le résoudre dans la plupart des cas, il faut des définitions plus précises, de nouveaux principes, de nouvelles méthodes.

CHAPITRE IV.

MAXIMUM ET MINIMUM. APPLICATION A LA CONSTRUCTION DES COURBES.

22. Si l'on chauffe de l'eau prise à la température de 0°, son volume diminue progressivement à mesure que la température marche vers 4° ; dès qu'elle a atteint cette valeur, le volume augmente, et à la température de 8°, il est sensiblement le même qu'à 0°. La variable indépendante est la température ; la fonction est le volume ; lorsque la température passe par 4°, le volume d'une même masse d'eau atteint sa valeur minimum ; au contraire sa densité atteint sa valeur maximum.

En général, une fonction admet une valeur maximum b pour $x = a$, lorsque pour $x = a \pm h$, si petit que soit h, les valeurs de la fonction sont moindres que b.

De même, une fonction admet une valeur minimum b pour $x = a$, lorsque pour $x = a \pm h$ les valeurs de la fonction sont plus grandes que b.

Telle est la définition du véritable maximum ou minimum de la nature.

« Lorsqu'on cherche à rendre une grandeur égale à une quantité, a dit M. Bertrand, le problème n'est souvent possible que sous certaines conditions. Dans la

plupart des cas, il faut que la quantité donnée soit comprise entre certaines limites qui indiquent la plus grande et la plus petite valeur que l'on puisse attribuer à la grandeur considérée, c'est-à-dire le maximun et le minimum de cette grandeur ».

On voit que M. Joseph Bertrand n'a pas suivi la définition généralement admise. Il s'est placé à un point de vue plus général. Lorsqu'on emploie la méthode du radical carré, si la fonction passe réellement par l'une des limites dont on vient de parler, on a un véritable maximum ou minimum ; mais souvent la fonction tend vers l'une de ces limites sans l'atteindre ; cette limite donne une asymptote. Cette remarque sera expliquée plus loin au moyen de plusieurs exemples.

D'un autre côté, lorsque l'inconnue est x^2, il ne suffit pas que le radical soit réel, il faut encore que l'expression de x^2 soit positive, ce qui fournit une nouvelle limite pour la quantité considérée (nº 86) ; et cette limite aura encore un caractère différent du véritable maximum ou minimum.

23. Théorème I.

Si la somme de deux facteurs est constante, leur produit est maximum lorsque les facteurs sont égaux, ou plutôt, lorsque leur différence est minimum.

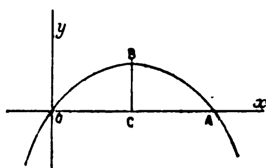
L'identité $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,a\,b$

nous donne $a\,b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$

Si $a + b$ est la somme constante des facteurs a et b, le produit $a\,b$ sera d'autant plus grand que le terme retranché sera plus petit ; si on le rend nul en posant $a - b = o$, le produit aura pour valeur maximum a^2.

On peut encore dire : soient $a + z$ et $a - z$ deux facteurs dont la somme constante est $2a$; leur produit $a^2 - z^2$ sera maximum si z est égal à zéro, ou si les facteurs sont égaux. Ces deux manières de raisonner ne diffèrent pas en réalité, car on a démontré que les deux formules employées sont identiques. (N° 6.)

Soit la fonction $y = x(a - x)$; elle est le produit de deux facteurs variables dont la somme est égale à la constante a. Construisons la parabole.



Pour $x = o$, $y = o$. La courbe passe par l'origine. Pour $x = a = \mathrm{OA}$, $y = o$, ce qui donne le point A où elle coupe de nouveau l'axe des x. Pour $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a^2}{4} = \mathrm{CB}$; la valeur maximum est égale à l'ordonnée du sommet.

24. 2e Démonstration. Méthode du carré complet.

On a successivement

$$y = ax - x^2 = -(x^2 - ax) = -\left(x^2 - 2\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right)$$
$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$$

La fonction y aura sa valeur maximum $\frac{a^2}{4}$ si le terme retranché est nul, ou si l'on pose $x = \frac{a}{2}$.

25. 3e Démonstration. Méthode du radical carré.

Suivant l'usage, posons $x(a - x) = m$ et résolvons cette équation par rapport à x.

On obtient : $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}$

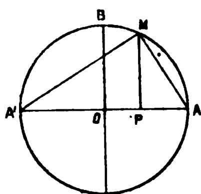
Pour que la valeur de x soit réelle, il faut que la quantité soumise au radical carré soit positive, ou que l'on ait

$$m < \frac{a^2}{4}$$

Si m atteint cette limite, le radical est nul, et l'on a

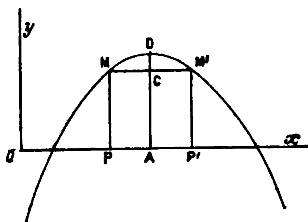
$$x = \frac{a}{2}.$$

26. 4e Méthode. Représentons par le diamètre A A' la somme constante des deux facteurs A' P et A P. On sait que la demi-corde M P perpendiculaire au diamètre est moyenne proportionnelle entre A' P et A P. On a donc $A'P \times AP = MP^2$. Le produit aura son maximum lorsque M P sera égal au rayon O B, ou lorsque le point P sera au centre ; alors les facteurs seront égaux.



27. 5e Démonstration. *Méthode de Fermat.* Képler a reconnu le premier que dans le voisinage d'un maximum ou d'un minimum, toute fonction continue varie par degrés insensibles. Fermat a tiré de cette remarque une règle pour le maximum ou le minimum. Soit $y = f(x)$ la fonction qu'il s'agit de rendre maximum ou minimum. On écrit $f(x) = f(x + h)$, en désignant par h une quantité susceptible d'être aussi voisine de zéro qu'on voudra. Mais dans cette égalité il ne faut pas, avec Fermat, regarder x comme représentant la valeur O A qui doit donner à la fonction sa valeur limite, sous peine d'égaler des choses inégales. C'est

Huygens qui le premier a exposé cette méthode d'une manière rigoureuse.



Menons une corde M M' parallèle à l'axe $o\,x$. Soient O P $= x$ et P P' $= h$; on aura M P = M' P' et par suite $f(x) = f(x+h)$

Cette équation ferait connaître x pour une valeur donnée de h.

Si l'on fait tendre h vers *zéro*, la corde M M' diminue vers cette limite, les ordonnées M P et M' P', toujours égales, tendent vers l'ordonnée maximum A D qui correspond à $x_1 =$ 0 A. On obtiendra cette valeur de x en faisant $h = o$ dans l'égalité $f(x) = f(x+h)$. Mais pour éviter de retomber sur une identité inutile, il faut d'abord opérer les réductions et les simplifications que comporte l'équation particulière.

Pour résoudre le problème actuel, posons

$$x(a-x) = (x+h)(a-x-h)$$

Ce qui donne

$$o = h(a-x) - h(x+h)$$

En supprimant le facteur h, on obtient

$$a - x = x + h.$$

Si l'on passe à la limite, pour $h = o$, on a $x = \frac{a}{2}$

Cette abscisse donne bien un maximum ; car on a

$$\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} > \left(\frac{a}{2} + h\right)\left(\frac{a}{2} - h\right)$$

Ou bien $\frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4} - h^2$.

Pour trouver la valeur de x qui rendrait la fonction $f(x)$ minimum, il faudrait faire le même raisonnement et le même calcul ; lorsque l'on a trouvé par la méthode de Fermat une valeur de x égale à O A, il faut ensuite vérifier si elle correspond soit à un maximum, soit à un minimum, en étudiant la variation de la fonction dans le voisinage de la valeur obtenue, comme on vient de le faire dans le cas précédent.

28. Théorème II. Si le produit de deux facteurs est constant, leur somme est minimum lorsque les facteurs sont égaux.

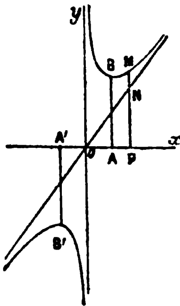
1[re] Démonstration. Reprenons l'identité

$$(a + b)^2 = 4\,ab + (a - b)^2$$

Soit ab le produit constant ; le second membre sera minimum si le second terme $(a - b)^2$ qui est positif, est lui-même minimum, ou nul, si c'est possible.

Si l'on fait $b = a$, le second membre a pour valeur minimum $4\,a^2$; la somme $a + b$ a donc pour limite $2\,a$, lorsque ses parties sont égales.

Soit $y = x + \frac{a^2}{x}$. Cette fonction est la somme de deux quantités dont le produit est égal à la constante a^2. Prenons a pour unité dans la construction de l'hyperbole. Son équation est alors $y = x + \frac{1}{x} =$ M P.



Considérons la droite O N dont l'équation est $z = x$.

Cette droite est bissectrice de l'angle droit $y\,o\,x$.

On a

$$M\,N = M\,P - N\,P = x + \frac{1}{x} - x = \frac{1}{x}.$$

Pour $x = \pm \infty$, M N $= o$. On voit que la distance M N va en diminuant à mesure que x augmente ; si l'on veut que cette différence soit plus petite qu'une fraction α aussi voisine de zéro qu'on voudra, il suffit de poser $\frac{1}{x} < \alpha$, ou $x > \frac{1}{\alpha}$. On peut donc prendre x assez grand pour satisfaire à cette inégalité. Ainsi M N n'a d'autre limite que zéro. Et comme cette limite ne peut être atteinte par aucune valeur finie de x, on dit que la droite est une asymptote à la courbe. L'autre asymptote est $o\,y$, car pour $x = o$, $y = \pm \infty$.

Egalons les deux parties de la somme. On obtient successivement :

$$x = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 1$$

$$\text{d'où} \quad x = \pm 1$$

$$x' = -1 = -\,\mathrm{O\,A^1},\ x'' = 1 = \mathrm{O\,A}.$$

Le point A est le pied de l'ordonnée minimum, égale à 2, et le point A' celui de l'ordonnée maximum, égale à — 2.

Les points B et B' diffèrent des sommets de l'hyper-

bole dont l'orientation est irrégulière par rapport à O x et O y.

29. 2e Démonstration. *Méthode du radical carré.*

Posons $x + \frac{a^2}{x} = m$

Résolvons l'équation par rapport à x, comme si m était une quantité connue :

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - a^2}.$$

Pour que x soit réel, on doit avoir :

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 - a^2 > o$$

$$\left(\frac{m}{2} + a\right)\left(\frac{m}{2} - a\right) > o$$

Les deux binômes devront être de même signe. Prenons-les d'abord positifs :

$$\frac{m}{2} + a > o$$

$$\frac{m}{2} - a > o$$

D'où $\frac{m}{2} > -a$

$$\frac{m}{2} > a$$

Si l'on a $m > 2\,a$, on satisfait aux deux inégalités, la quantité $2\ a$ est le minimum, ce qui suppose $x = \frac{m}{2} = a =$ O A. Les facteurs du produit constant sont alors égaux.

Supposons que les deux binômes soient ensemble négatifs ; on aura :

$$\frac{m}{2} + a < o$$

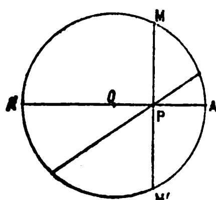
$$\frac{m}{2} - a < o$$

d'où

$$m < -2a$$
$$m < 2a$$

Si l'on pose $m < -2a$, la seconde inégalité sera satisfaite, la valeur $-2a$ sera le maximum, qui aura lieu pour $x = -a = -o$ A'.

30. 3[e] Démonstration.



Soit la droite M P $= a =$ M' P. On peut faire passer par les points M et M' une infinité de circonférences. Considérons l'une d'elles dont le centre est o, et dont le rayon o A est d'ailleurs aussi grand qu'on voudra.

Par le point P, on peut mener une infinité de cordes dont le produit est constant et égal à a^2 ; M M' est la plus petite de toutes ces cordes ; c'est celle dont les parties sont égales : la plus petite somme des facteurs dont le produit est constant est celle dont les parties sont égales, ce qu'il fallait démontrer.

On pourrait croire que la somme des facteurs est limitée par un maximum A A' ; mais le diamètre du cercle peut être supposé aussi grand qu'on voudra pour la même valeur a ; il n'y a donc pas de maximum.

31. 4[e] Démontration. Méthode de Fermat.

Posons

$$x + \frac{a^2}{x} = x + h + \frac{a^2}{x+h}$$

On aura successivement

$$\frac{a^2}{x} = h + \frac{a^2}{x+h}$$

$$a^2 = x(x+h)$$

A la limite, pour $h = o$, il vient

$$x^2 = a^2, \text{ d'où } x = \pm a$$

Il reste à distinguer le minimum. Or dans la somme $y = x + \frac{a^2}{x}$, si on ne considère que des valeurs positives, pour $x = o$, $y = \infty$, et pour $x = \infty$, $y = \infty$; la somme peut donc croître sans limite maximum ; donc pour $x = a$, on a un minimum qui est $y_1 = a + \frac{a^2}{a} = 2a$.

Au reste on peut vérifier le minimum de la manière suivante :

On doit avoir

$$a + h + \frac{a^2}{a+h} > 2a.$$

Ou bien

$$h + \frac{a^2}{a+h} > a$$

$$ah + h^2 + a^2 > a^2 + ah$$

$$h^2 > o$$

Or, quel que soit le signe de h, la dernière inégalité sera satisfaite. Donc le minimum a lieu pour $x = a$.

Lorsque l'on considère les valeurs négatives de x, les

parties de y étant négatives, la plus grande somme est celle dont la valeur absolue est la plus petite : on a alors un maximum.

32. Théorème III.

Si la somme de plusieurs facteurs est constante, leur produit est maximum, lorsque ces facteurs sont égaux.

Soit $x + y + z + t = C$.

C désignant une sômme constante.

Admettons que des valeurs particulières des parties donnent lieu à un produit maximum

$$x_1\, y_1\, z_1\, t_1 = m$$

sans que x_1 et y_1 soient des facteurs égaux. On peut écrire :

$$x_1 + y_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{y_1}{2} + \frac{y_1}{2} = \frac{x_1 + y_1}{2} + \frac{x_1 + y_1}{2}$$

Substituons à $x_1\, y_1$ le produit des moyennes arithmétiques, ce qui ne change pas leur somme. On aura d'après le théorème I :

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right)\left(\frac{x_1 + y_1}{2}\right) z_1\, t_1 > x_1\, y_1\, z_1\, t_1.$$

Ce dernier produit n'était donc par le maximum.

Il faut donc que tous les facteurs soient égaux. Nous verrons plus loin qu'on ne peut pas toujours réaliser cette condition.

33. Théorème IV. Si plusieurs quantités ont une somme constante, le produit des puissances entières de ces quantités est maximum lorsque ces quantités sont proportionnelles à leurs exposants.

Considérons, par exemple, un cas particulier qui suffira dans la pratique.

Soit $x + y + z = c$.

Il s'agit de rendre maximum le produit $x^3 y^2 z$.

On peut écrire

$$x + y + z = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = \mathrm{C}.$$

Le produit de ces six facteurs, $\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^2 z$ sera maximum si l'on a $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$, c'est-à-dire, si tous les facteurs sont égaux.

Or on a $\left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{y}{2}\right)^2 z = \frac{x^3 y^2 z}{27 \times 4}$; le dénominateur étant constant, si ce produit atteint alors son maximum, il en sera de même du produit $x^3 y^2 z$, ce qu'il fallait démontrer.

34. On sait, depuis Héron d'Alexandrie, que la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés a, b, c, et par suite le périmètre $2p$, est donné par une règle que les auteurs modernes ont exprimée par la formule

$$\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Considérons une suite de triangles de même périmètre $2p$, et de côtés quelconques.

La somme des trois facteurs variables du produit soumis au radical est

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p.$$

Cette somme est constante ; pour que le produit soit maximum, il faut poser

$$p - a = p - b = p - c,$$

ou bien $\quad a = b = c\,;$

la surface maximum est celle du triangle équilatéral.

35. Pour construire une courbe représentée par une équation $y = f(x)$, voici la marche à suivre :

1° On cherche les points où la courbe coupe les axes des coordonnées.

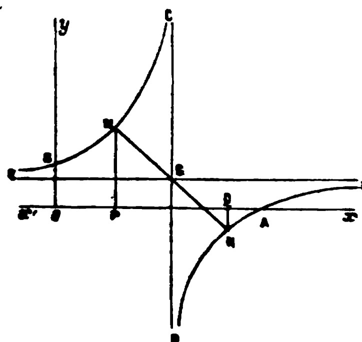
2° On cherche ensuite le maximum ou le minimum de la fonction.

3° On construit les asymptotes s'il y a lieu.

4° On y ajoute la détermination de quelques points particuliers afin de connaître avec plus de précision la forme générale de la courbe.

Soit par exemple la fonction :

$$y = \frac{x-6}{x-4}.$$



Pour $x = 0$,

$$y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \text{O B}.$$

La courbe passe par le point B. L'ordonnée y sera nulle pour $x = 6 = \text{O A}$; la courbe passe par le point A. Soit $x = 4 \pm h$, la quantité h étant aussi voisine de zéro qu'on voudra. On aura $y = \dfrac{-2 \pm h}{\pm h}$. Le numérateur est négatif ; le dénominateur a le signe de h ; la fraction est donc positive ou négative lorsque h tend

vers zéro ; elle est d'ailleurs très grande en valeur absolue. Si l'on fait $h = o$, y devient infini ; on doit lui donner le double signe d'après ses valeurs antérieures. On dit donc que pour $h = o$, $y = \pm \infty$. La droite C D est une asymptote. Pour obtenir la seconde, on divise $x - 6$ par $x - 4$, ce qui donne

$$y = \frac{x-6}{x-4} = \frac{x-4-2}{x-4} = 1 - \frac{2}{x-4}.$$

La fonction $\frac{2}{x-4}$ est nulle pour $x = \pm \infty$; donc l'équation Z = 1 représente l'autre asymptote qui est la droite E F parallèle à l'axe des x.

L'hyperbole aura une branche dans l'angle F G D, car elle passe au point A ; sa seconde branche sera dans l'angle C G E, car elle passe au point B. Il n'y a pas de maximum ou de minimum, par suite de la position de la courbe par rapport aux axes rectangulaires qui sont parallèles aux asymptotes.

Cherchons sur la courbe un point M supposé à égale distance des deux asymptotes ; sa distance à E F est $y - 1$, et sa distance à C D est $4 - x$; on aura donc

$$y - 1 = 4 - x.$$

ou $$y = 5 - x.$$

C'est l'équation de la bissectrice de l'angle des asymptotes. Le point M étant sur la courbe, on a

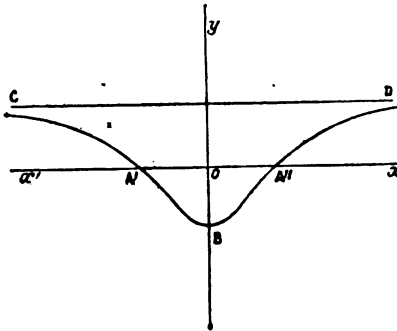
$$5 - x = \frac{x-6}{x-4}$$

d'où l'on tire : $x = 4 \pm \sqrt{2} = 4 \pm 1{,}414\ldots$
$x' = 2{,}586 = \text{O P}$, $y' = 5 - 2{,}586 = 2{,}414 = \text{P M}$.

$x'' = 5{,}414 = OQ,\ y'' = -0{,}414 = -NQ.$

Les points M et N sont les sommets de l'hyperbole.

36. La fonction $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ est du troisième degré, car si on chasse le dénominateur, le premier membre a un terme yx^2 du 3e degré. Construisons la courbe.



Pour $x = o$, on a $y = -1 = -OB$, la courbe traverse l'axe des y au point B; y est nul pour $x = \pm 1$; ce qui donne $x' = -1 = -OA'$, et $x'' = 1 = OA''$. La courbe coupe l'axe des x aux points A' et A''. En divisant le numérateur par le dénominateur, qui sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, on met la fonction sous la forme

$$y = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

L'équation $z = 1$ est celle d'une asymptote, car la différence $z - y$, égale à $\frac{2}{x^2 + 1}$, devient nulle pour $x = \pm \infty$. Lorsque x est suffisamment grand, cette différence est très petite, et ne varie presque plus, de sorte que la courbe s'avance parallèlement à l'asymptote C D.

Il y a au point B, un véritable minimum pour $x = o$. Car pour $x = \pm h$, le terme $\frac{2}{x^2 + 1}$, diminue, et com-

me il est affecté du signe —, la valeur de y augmente. La courbe est convexe vers le bas.

Employons la méthode du radical carré.

L'équation $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = m$ donne

$$x = \pm \sqrt{\frac{1 + m}{1 - m}}$$

La fraction soumise au radical sera positive si ses termes sont positifs : Soit

$$1 + m > o$$
$$1 - m > o$$

D'où $m > -1$

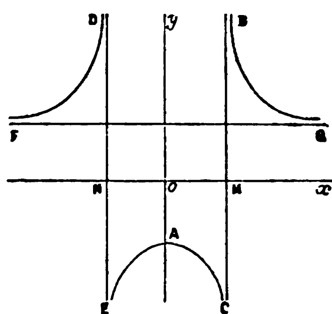
$$m < 1$$

Ainsi m sera compris entre — 1 qui est un minimum pour $x = o$, et $+ 1$, qui est un maximum pour $x = \pm \infty$. Mais on n'a pas un vrai maximum ; la limite $+ 1$ vers laquelle tend l'ordonnée sans y atteindre, indique l'asymptote C D.

Comme le dénominateur de y est toujours positif, l'ordonnée a toujours le signe du numérateur ; en l'égalant à zéro, on a une équation $x^2 - 1 = o$, dont les racines sont $x' = -1$, $x'' = +1$; pour toute valeur de x comprise entre les racines, la fonction est négative, contrairement à son terme x^2 ; pour toute valeur prise en dehors, la fonction a le signe + de son terme du second degré. La courbe étant du 3e degré ne peut pas être coupée par aucune droite en plus de trois points. A défaut de la théorie, on peut voir, par le dessin graphique, que la droite, suivant la position qu'on lui donnera, ne rencontrera pas la courbe, ou

bien qu'elle la rencontrera en un point, en deux, ou même en trois points.

37. L'équation $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ est encore du troisième degré. Le numérateur étant toujours positif quel que soit le signe de x, la courbe ne coupe pas l'axe des x. Pour $x = o$, on a $y = -1 = -$ OA.



Pour $x = \pm 1$, $y = \pm \infty$, ce qui donne les deux asymptotes B C et D E.

On peut écrire

$$y = \frac{x^2+1-2+2}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Pour $x = \pm \infty$, le terme $\frac{2}{x^2-1}$ devient nul, donc l'équation $z = 1$ représente l'asymptote F G. Au point A est un maximum, car on a $y = 1 - \frac{2}{1-x^2}$; pour $x = \pm h$, à partir de $x = o$, le terme $\frac{2}{1-x^2}$ augmente ; et comme il est affecté du signe —, la valeur relative de y diminue. La courbe est convexe vers le haut. La méthode du radical carré conduit à la même conclusion en donnant à la fois le maximum et l'asymptote F G.

La courbe que l'on vient de discuter permet de faire une remarque importante. Lorsque l'abscisse passe par la valeur — O N, l'ordonnée saute brusquement de $+\infty$ à $-\infty$; l'asymptote sépare deux branches de courbe, F D qui est à sa gauche, et E A C qui est à sa droite. De

même lorsque l'abscisse passe par la valeur O M, l'ordonnée va de $-\infty$ à $+\infty$; l'asymptote B C sépare la branche E A C de la branche B G. Souvent les diverses branches d'une courbe sont séparées par des asymptotes. Mais ce n'est pas une règle sans exception (n° 86).

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DU TRINOME DU SECOND DEGRÉ.

38. L'équation $y = ax^2 + bx + c$, dans laquelle les trois coefficients a, b, et c sont entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs, représente une parabole. Il faut déterminer les points où elle coupe les axes rectangulaires, et les coordonnées du sommet. Il importe de résoudre l'équation

$$ax^2 + bx + c = o.$$

Il ne faut pas oublier que les signes des termes de cette équation dépendent de ceux du trinome

$$y = ax^2 + bx + c,$$

et que ce trinome peut se trouver sous un radical.

Le cas particulier où a est nul doit être écarté, et réservé pour une discussion spéciale. La question est donc ramenée à la résolution de l'équation

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = o$, ou à celle de l'équation

$x^2 + px + q = o$

si l'on pose $\frac{b}{a} = p$, et $\frac{c}{a} = q$.

39. 1° Méthode du carré complet.

Cette méthode est présentée par les auteurs sous différentes formes qui sont équivalentes, excepté au point de vue de la simplicité.

On peut écrire :

$$x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

On a maintenant deux équations du premier degré.

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,.$$

On a par suite

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b - 4ac}}{2a}$$

L'équation du second degré admet deux racines, c'est-à-dire, deux quantités telles que chacune d'elles, mise à la place de x, rend égaux les deux membres de l'équation.

40. Si la quantité soumise au radical est positive, les deux racines sont réelles et inégales :

$$x' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si cette quantité est nulle, les racines sont égales :

$$x' = x'' = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

Enfin, si la quantité soumise au radical est négative les racines sont imaginaires ; aucune valeur positive ou négative ne peut rendre le trinome égal à zéro.

En effet on peut écrire :

$$y = a\,(x^2 + p\,x + q) = a\left(x^2 + 2\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]$$

Si l'on a $q > \frac{p^2}{4}$, la parenthèse est positive, le trinome ne peut être nul par aucune valeur de x entière ou fractionnaire, positive ou négative, incommensurable ou rationnelle. Alors, si a est positif, le trinome sera essentiellement positif ; et si a est négatif, ce trinome sera toujours négatif. Le signe du trinome sera toujours celui de son premier terme $a\,x^2$. Il en sera de même si $\frac{p^2}{4} = q$; car le trinome est alors

$$y = a\left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Le carré étant toujours positif, le signe de y sera celui de a.

41. Si l'on fait la somme des racines, on a

$$x' + x'' = -p.$$

Si on fait leur produit, on a

$$x'\,x'' = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right);$$

d'après l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, on obtient

$$x'\,x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Ainsi on a les relations importantes

$$x' + x'' = -p = -\frac{b}{a}$$

$$x' x'' = q = \frac{c}{a}.$$

On peut écrire successivement

$$y = a\left(x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q\right).$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2\right]$$

$$y = a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

$$y = a\,(x - x')\,(x - x'').$$

Ainsi le trinome du second degré est décomposable en deux facteurs du premier degré dont le second terme est l'une des racines prise en signe contraire.

42. Par définition, le trinome est nul lorsqu'on y remplace x par l'une des racines. Mais quel signe prend-il lorsque l'on remplace x par une quantité prise soit entre les racines, soit en dehors de l'intervalle des racines, supposées réelles et inégales ?

Donnons à x une valeur prise en dehors des racines. Posons d'abord

$$x < x' < x''$$

d'où $$x - x' < o,\ x - x'' < o.$$

Les deux facteurs du 1er degré étant ensemble négatifs, leur produit sera positif, et le trinome aura le signe de a.

Posons ensuite

$$x > x'' > x'$$

d'où $$x - x'' > o, \quad x - x' > o.$$

Les deux binomes auront un produit positif, et le trinome aura toujours le signe de a.

Maintenant soit x compris entre les racines. On aura

$$x' < x < x''$$

$$x - x' > o, \quad x - x'' < o.$$

Les deux binomes étant l'un positif, et l'autre négatif, auront un produit négatif, ce qui changera le signe de a. En résumé, si les racines sont réelles et inégales, pour toute valeur de x prise entre les racines, le trinome aura le signe contraire de ax^2 ; et pour toute valeur prise en dehors, il aura le même signe que ce premier terme, comme dans le cas où les racines sont ou égales ou imaginaires.

Ces résultats sont dans tous les traités d'algèbre. On doit placer ici une remarque importante. Supposons que les racines soient réelles et que la question particulière donne une limite pour l'inconnue ; que l'on ait, par exemple, $x < l$. Substituons cette valeur dans le trinome :

1° Si le résultat de cette substitution a le signe contraire de x^2, la valeur l est comprise entre les racines ; on a

$$x' < l < x''$$

mais l'hypothèse donne $x < l$; on fera donc $x = x'$; l'autre racine ne convient pas. Si l'on donnait $x > l$, on prendrait $x = x''$.

2° Si le résultat a le même signe que le 1er terme

ax^2, la limite l est en dehors des racines ; on aura l'une ou l'autre des inégalités

$$l < x' < x''$$
$$l > x'' > x'$$

Que l'on ait d'ailleurs $x > l$, ou $x < l$, cela n'exclut aucune des deux racines ; le théorème n'indique aucune incompatibilité (n° 80).

43. Nous allons maintenant insister sur la résolution de l'équation du second degré.

2° Méthode de la décomposition en facteurs.

Nous avons rencontré l'identité

$$y = a\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

Le trinome sera nul si l'on a l'une ou l'autre des deux équations du premier degré :

$$x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$$

$$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$$

La première donne

$$x' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

La seconde

$$x'' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ce sont les racines obtenues par la méthode du carré complet qui, du reste, conduit à la décomposition en facteurs.

Comme exercice, reprenons la question sous une autre forme.

On a successivement

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right]$$

Supposons $b^2 - 4ac > o$

on aura

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right]$$

Le radical est réel quel que soit le signe de a. Dans la parenthèse est la différence des carrés de quantités réelles.

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

En égalant à zéro chaque facteur du 1er degré, on aura les deux racines réelles x' et x''.

Supposons $b^2 - 4ac < o$, ou $4ac - b^2 > o$

on aura

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Dans la parenthèse est la somme de deux quantités positives ; cette somme ne peut être nulle. On dit que les racines sont imaginaires. Mais chacune d'elles est une expression très précise qui, suivant les règles ordinaires du calcul, satisfait à l'équation. On sup-

pose toujours que a n'est pas nul. Si a est nul, l'équation n'admet plus qu'une seule racine réelle et finie, ce qui sera établi plus loin.

44. 3° Méthode de Viète.

Pour résoudre l'équation $x^2 + p\,x + q = o$, posons $x = z + h$, ce qui donne

$$z^2 + 2\,h\,z + h^2 + p\,z + p\,h + q = o$$

et par suite:

$$z^2 + (2\,h + p)\,z + h^2 + p\,h + q = o.$$

Pour faire disparaître le terme du 1er degré,

posons $h = -\frac{p}{2}$; il reste:

$z^2 - \frac{p^2}{4} + q = o$, ou bien

$z^2 = \frac{p^2}{4} - q$

d'où $z = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

et par suite

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nous verrons (n° 53) que cette méthode revient à déplacer l'origine des abscisses, et à faire passer l'axe des ordonnées par le sommet de la parabole.

45. 4e Méthode. Si entre les relations

$$x' + x'' = -p, \; x'\,x'' = q$$

on élimine x'', on obtient $x'^2 + p\,x' + q = o$; il ne faut pas en conclure que ces relations déterminées directe-

ment ne serviraient pas à résoudre l'équation du second degré. En effet, supposons que dans l'identité

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4\,a\,b$$

les racines soient représentées par a et b ; on aura $a+b=-p, a\,b=q$, et par suite $(a-b)^2=p^2-4\,q$.

Ce qui donne

$$a-b=\pm\sqrt{p^2-4\,q}$$

Or on a $\quad a+b=-p$

On aura donc, par addition :

$$2a=-p\pm\sqrt{p^2-4\,q}$$

et par suite

$$a=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

En cherchant a, on trouve en même temps l'autre racine, parce que a et b jouent le même rôle dans les équations $a+b=-p$, $ab=q$.

Il est d'ailleurs aisé d'établir directement les relations $x'+x''=-p$, $x'\,x''=q$, sans connaître les racines, sans résoudre l'équation.

Si x' et x'' sont racines de l'équation $x^2+p\,x+q=o$ on a par définition

$$x'^2+p\,x'+q=o$$
$$x''^2+p\,x''+q=o$$

On peut calculer p et q au moyen de ces deux équations.

Par soustraction on obtient

$$x'^2-x''^2+p\,(x'-x'')=o.$$

Si on divise par $x' - x''$, on obtient $x' + x'' + p = o$, ou bien $p = -(x' + x'')$.

Mettons cette valeur de p dans la première identité ; il vient

$$x'^2 - (x' + x'')x' = -q$$

ou

$$x' x'' = q.$$

Mettons dans le trinome les expressions de p et de q ;

$$y = a\,[x^2 - (x' + x'')\,x + x' x'']$$
$$y = a\,(x^2 - x' x - x'' x + x' x'')$$
$$y = a\,[x\,(x - x') + x''\,(x' - x)]$$
$$y = a\,(x - x')\,(x - x'').$$

Voilà le trinome décomposé en facteurs du premier degré.

On peut encore arriver à ces résultats par une simple division. On obtient

$$x^2 + p x + q = (x - x')\,(x + p + x') + x'^2 + p x' + q.$$

Si l'on suppose que x' est une racine de l'équation, le reste $x'^2 + p x' + q$ est nul, et le trinome devient

$$x^2 + p x + q = (x - x')\,(x + x' + p)$$

Il est décomposé en facteurs du 1er degré. Donc s'il y a une racine x', il y en a une seconde : $-(x' + p) = x''$. On a donc $x' + x'' = -p$.

On a d'ailleurs $x' x'' = -x'(x' + p) = -x'^2 - p x' = q$. Ces résultats ne supposent pas qu'on sache résoudre l'équation.

46. 5° Méthode de l'auteur.

On peut écrire

$$x\,(x + p) = -q.$$

Les deux facteurs x et $x+p$ ont une différence p. Désignons leur somme par s. On aura

$$x = \frac{s}{2} - \frac{p}{2}$$

$$x + p = \frac{s}{2} + \frac{p}{2}$$

Si on les multiplie, on obtient

$$x(x+p) = \frac{s^2}{4} - \frac{p^2}{4}$$

et par suite

$$\frac{s^2}{4} - \frac{p^2}{4} = -q.$$

On en tire $\frac{s}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$

On connaît donc la somme et la différence de deux quantités x et $x+p$; mais nous ne cherchons que la première de ces quantités :

$$x = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2}.$$

C'est la formule connue.

On remarquera le rôle important du principe sur la différence des carrés (n° 3) toutes les fois qu'il s'agit de la fonction du second degré.

On a démontré l'équivalence des relations

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4\,a\,b$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Si la première permet de trouver les racines de l'équation du second degré, il devait en être de même

de la seconde. Mais celle-ci a l'avantage de conduire directement à la solution.

47. 6e Méthode.

La géométrie permet non-seulement de construire au moyen de la règle et du compas, les racines de l'équation du second degré, mais encore de les trouver par le calcul numérique.

Soit $x^2 + px + q = o.$

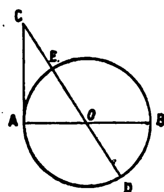
Supposons d'abord que les coefficients p et q soient négatifs et qu'on ait

$$p = -p'$$
$$q = -q'^2$$

L'équation devient

$$q'^2 = x(x - p').$$

Il s'agit de construire un rectangle équivalent à un carré, et dont les côtés aient entre eux une différence donnée.



Soient le diamètre A B égal à p', et la tangente A C $= q'$. Menons par le centre la sécante C O D.

On a

$$AC^2 = CD \times CE = CD(CD - ED)$$

Ou

$$q'^2 = CD(CD - p')$$

Ce qui montre que CD est une racine de l'équation. Or on a

$$CD = OD + OC = \frac{p'}{2} + \sqrt{\frac{p'^2}{4} + q'^2}$$

On a donc

$$x'' = CD = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

D'après la composition du coefficient p qu'on a pu déterminer directement :

$$x'' + x' = -p = p'$$

or on a $\quad CD - CE = p'$

donc $\quad x' = -CE.$

Dans le cas actuel les racines sont toujours réelles.

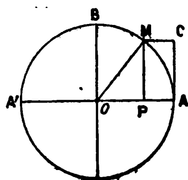
Supposons maintenant que p soit négatif et q positif, et écrivons

$$p = -p', q = q'^2$$

L'équation devient

$$q'^2 = x(p' - x)$$

Il s'agit de construire un rectangle égal à un carré et dont les côtés fassent une somme donnée p'.



On prend le diamètre A A' égal à p', et la tangente A C égale à q' ; et l'on achève le rectangle P A C M.

Les racines de l'équation sont

$$x' = AP, x'' = A'P.$$

$$AP = AO - OP$$

$$AP = \frac{p'}{2} - \sqrt{\frac{p'^2}{4} - q'^2} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

$$A'P = A'O + OP = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

La figure montre que les racines sont imaginaires si

l'on a $$AC > OB$$
$$q' > \frac{p'}{2}$$
$$q > \frac{p^2}{4}.$$

48. La résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = o$, indiquera si la parabole représentée par la fonction $y = ax^2 + bx + c$, traverse l'axe des x ; on pourra dessiner la forme approchée de la courbe lorsqu'on connaîtra d'ailleurs les coordonnées du sommet, c'est-à-dire les conditions du maximum ou du minimum. On peut traiter ce problême de plusieurs manières différentes.

49. 1° Méthode du radical carré.

Posons $ax^2 + bx + c = m$.

Résolvons cette équation par rapport à x comme si m était un nombre connu.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-m)}}{2a}$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{4a(m + \frac{b^2}{4a} - c)}}{2a}$$

Supposons d'abord que a soit positif. Pour que le radical soit réel, il faut que le second facteur soit lui-même positif ; on aura

$$m + \frac{b^2}{4a} - c > o$$

D'où

$$m > c - \frac{b^2}{4a}.$$

Lorsque m atteindra cette valeur minimum, on aura pour x la valeur $-\frac{b}{2a}$.

Désignons par les premières lettres grecques alpha et bêta les coordonnées du sommet :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \quad \beta = c - \frac{b^2}{4a}$$

Si a est négatif, il faut poser

$$m + \frac{b^2}{4a} - c < o$$

afin que le produit des deux facteurs soit positif.

On aura donc

$$m < c - \frac{b^2}{4a}$$

A cette limite maximum, l'abscisse a encore pour valeur

$$x = \alpha = -\frac{b}{2a}$$

50. 2° Méthode du carré complet.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Si a est positif, y aura sa plus petite valeur, si l'on pose $x + \frac{b}{2a} = 0$, ce qui donne :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a}$$

Si a est négatif, la valeur de β sera un maximum.

51. 3° Méthode des facteurs égaux.

Le trinome étant décomposable en facteurs du 1[er] degré, on a

$$y = a(x - x')(x - x'') = -a(x - x')(x'' - x).$$

Les facteurs $x - x'$ et $x'' - x$ ont une somme constante $x'' - x'$; leur produit sera maximum lorsque ces facteurs seront égaux; l'équation $x - x' = x'' - x$ donne

$$x = \frac{x' + x''}{2} = -\frac{b}{2a} = \alpha$$

$$\beta = -a\left(\frac{x' + x''}{2} - x'\right)^2 = -a\left(\frac{x'' - x'}{2}\right)^2.$$

$$\beta = -\frac{a}{4}\left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}\right)^2 = -\frac{a}{4}\left(\frac{b^2 - 4ac}{a^2}\right)$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Si a est positif, à la valeur maximum du produit $(x - x')(x'' - x)$ correspondra un minimum pour y.

Si au contraire a est implicitement négatif, $-(-a')$ donnera $+a'$, et la valeur limite de y sera un maximum.

Dans le cas des racines imaginaires, on a

$$x' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}\sqrt{-1}}{2a}$$

$$x'' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}\sqrt{-1}}{2a}$$

L'expression de y est

$$-a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a}\right)\left(-x-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a}\right)$$

La somme des facteurs du 1er degré est la constante imaginaire $\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{a}$.

Malgré cela, l'application du théorème I à ces facteurs imaginaires conduit à un résultat exact. On sait que chacune des racines imaginaires est une expression très précise qui vérifie l'équation $ax^2+bx+c=o$, lorsqu'on lui applique les règles ordinaires du calcul algébrique. Le résultat de la substitution est indépendant du radical, réel ou imaginaire. De même les coordonnées du sommet sont indépendantes du radical ; il en résulte, suivant une remarque de Chasles, que les propriétés relatives à ce sommet, démontrées pour l'état de la figure où les racines sont réelles, sont encore vraies pour l'autre état dans lequel les racines ont cessé d'exister.

52. 4° Méthode de Fermat.

En appliquant la théorie exposée au n° 27 on posera

$$ax^2+bx+c=a(x+h)^2+b(x+h)+c$$

$$o=2ahx+ah^2+bh.$$

Supprimons le facteur commun h :

$$o=2ax+ah+b.$$

Si h tend vers zéro, on aura à la limite

$$x=\alpha=-\frac{b}{2a};$$

en introduisant cette valeur dans l'expression de y, on obtient

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a}$$

Souvent la nature du problème fait connaître si la valeur de β est un maximum ou un minimum. Mais ici la méthode se suffit à elle-même.

Comparons F (α) à F ($\alpha + z$), z pouvant être positif ou négatif.

$$y = a(-\frac{b}{2a} + z)^2 + b(-\frac{b}{2a} + z) + c = c - \frac{b^2}{4a} + az^2$$

On a donc $y = \beta + az^2$.

La longueur z ne figurant qu'au carré, son signe n'aura pas d'influence ; la valeur de y dépendra du signe de a. Si ce coefficient est positif, on a $y > \beta$; donc β est un minimum. Si au contraire a est négatif on a $y < \beta$; alors β est un maximum.

On a $z^2 = \frac{y - \beta}{a}$, d'où $z = \pm\sqrt{\frac{y - \beta}{a}}$.

Pour une même valeur A C de y, on a deux valeurs de z, C M et C M′ égales et contraires ; la courbe est donc symétrique par rapport à son axe D A.

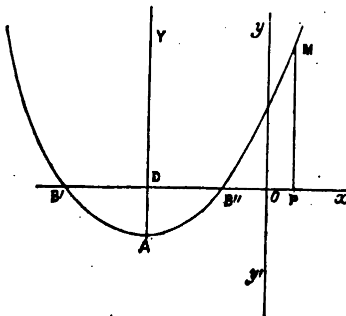
53. En résumé chaque méthode conduit au résultat suivant : L'abscisse du sommet de la parabole est $\alpha = -\frac{b}{2a}$, et son ordonnée est $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$.

Si a est positif, la fonction a un minimum ; si a est négatif, la fonction a un maximum.

Construisons la courbe dans l'hypothèse où b et c sont positifs.

Supposons d'abord que a soit positif dans l'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$



Pour $x = o, y = c = \text{O C}$; ce qui donne le point C où la courbe traverse l'axe des ordonnées.

Pour savoir si elle coupe l'axe des x, résolvons l'équation $ax^2 + bx + c = o$ d'où

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

les racines seront réelles si l'on a

$$a < \frac{b^2}{4c}$$

Dans cette hypothèse, on aura

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\text{O B}'$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\text{O B}''$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\text{O D}$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} = -\text{A D}$$

Le point D est situé au milieu de B′ B″, car en valeur absolue, O D est la demi-somme de O B′ et O B″. La distance B′ B″ est l'amplitude de la parabole.

Dans l'équation

$$y = x^2\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$$

Si x augmente indéfiniment, la quantité mise dans la parenthèse tend vers a, et pour $x = \pm \infty$, $y = +\infty$.

Prenons le point D pour origine d'autres abscisses ; on aura $\quad DP = X$

Or $\quad OP = DP - DO$

$$x = X - \frac{b}{2a}$$

Si l'on remplace x par cette valeur dans l'équation de la courbe, on obtient

$$y = aX^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Pour $X = \pm k$, y a toujours la même valeur à droite ou à gauche du nouvel axe D Y, qui est dès lors un axe de symétrie pour tous les points de la parabole.

Soit $y = o$; ou a

$$aX^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\text{d'où } X = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

X est égal à z dans la méthode de Viète, et

$h = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a} = DO$; donc h est l'abscisse du sommet de la parabole (n° 44).

Reprenons la formule

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

afin d'étudier un cas particulier remarquable.

54. Avant de faire $a = o$ dans les formules, comme ce coefficient entre au numérateur et au dénominateur

de chaque fraction, il convient de multiplier ces deux termes par l'expression conjuguée du numérateur (n° 3).

On peut écrire :

$$x' = \frac{(-b-\sqrt{b^2-4ac})(-b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b+\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$x'' = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} =$$

$$\frac{b^2-(b^2-4ac)}{2a(-b-\sqrt{b^2-4ac})} = \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}$$

Lorsque a diminue dans l'expression de x'', la quantité sous le radical augmente ; en valeur absolue le dénominateur augmente et la fraction diminue ; pour $a = o$, on a $x'' = -\frac{c}{b} = -$ O E ; le point B″ s'est rapproché d'un certain point E situé à droite du point B″.

Quant à la valeur de x', si a tend vers zéro, le dénominateur, toujours négatif, tend lui-même vers zéro, et x' augmente en valeur absolue au-delà de toute limite. Il en est de même de α et de β qui contiennent a à leur dénominateur. A mesure que a diminue, l'ordonnée D A s'éloigne vers la gauche en augmentant vers le bas de la figure, et l'amplitude de la parabole devient immense.

Mais l'hypothèse $a = o$ n'a plus de rapport avec cette parabole, et la forme $x' = -\infty$ est le symbole d'une impossibilité. Dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$, si a est égal à zéro, le terme $a\,x^2$ est nul pour toute va-

leur finie de x si grande qu'elle soit ; l'équation nouvelle $y = bx + c$ ne représente plus qu'une droite qui coupe l'axe des y au point C, et l'axe des x au point E pour lequel on a $x = -\frac{c}{b} = x''$. L'équation n'étant plus que du 1er degré n'admet qu'une seule racine, et n'en admet pas trois comme on le dit dans un traité d'algèbre d'ailleurs excellent.

55. Supposons maintenant que a soit négatif ; si l'on met ce signe en évidence, les formules deviennent

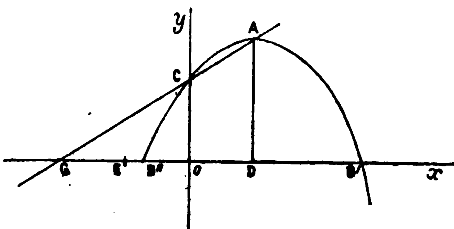
$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}$$

$$x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}$$

$$\alpha = \frac{b}{2a}$$

$$\beta = c + \frac{b^2}{4a}$$

Les racines sont toujours réelles ; la première est positive et la seconde est négative.



Pour $x = o$
$y = c = OC.$
$x' = + OB'$
$x'' = - OB''$
$\alpha = OD$
$\beta = DA.$

Si dans l'équation

$$y = x^2\left(-a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)$$

on fait croître x indéfiniment en valeur absolue, la parenthèse tend vers $-a$, et y tend vers $-\infty$.

Pour $a = o$, on a

$$x' = +\infty$$

$$x'' = -\frac{c}{b} = -o\,\mathrm{E}$$

$$\alpha = +\infty$$

$$\beta = +\infty$$

Si a diminue dans l'expression de x'', le radical diminue, et la fraction augmente en valeur absolue ; le point B″ se rapproche d'un certain point E dont l'abscisse est $-\frac{c}{b}$.

Quant à la valeur de x' qui est positive, son dénominateur tend vers zéro en restant positif, et x' augmente indéfiniment. Il en est de même des coordonnées α et β. L'ordonnée du sommet D A s'éloigne vers la droite en croissant vers le haut de la figure, à mesure que l'amplitude de la parabole augmente.

Mais l'hypothèse $a = o$ n'a plus aucun rapport avec cette courbe, comme on l'a déjà reconnu. Le trinome est réduit à l'équation $y = bx + c$, qui représente une droite passant par les points C et E déjà définis.

Nous avons supposé jusqu'ici b et c positifs. Dans les autres hypothèses, les conclusions seraient analogues. Examinons seulement le cas où b est négatif, et mettons le signe en évidence dans les formules, qui deviennent

$$x' = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x'' = \frac{2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Pour $a = o$, ce n'est plus la racine x' qui devient infinie ; c'est x''. Dans tous les cas, la racine qui devient infinie est celle qui présente à son dénominateur deux termes de signes contraires, et qui deviennent égaux lorsque l'on fait a égal à zéro.

56. Supposons que a soit variable dans l'équation $y = ax^2 + bx + c$, qui représente alors une infinité de paraboles ;

Entre les équations

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a}$$

éliminons la variable a, nous aurons

$$\beta = \frac{b}{2}\alpha + c$$

Cette équation à deux variables, qui sont les coordonnées du sommet de chaque parabole particulière, représente une droite qui est le lieu géométrique de tous les sommets.

Pour $\alpha = o$, $\beta = c =$ O C ; cette droite passe par le point C, comme toutes les paraboles.

Pour $\beta = o$, $\alpha = -2 \cdot \frac{c}{b} = -2$ O E $= -$ O G. Le point E est le milieu de O G ; et les points G, C et A sont en ligne droite, ce qui fournira des vérifications dans chaque cas particulier (60).

Supposons c négatif, et mettons le signe en évidence; on aura

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$\beta = -c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\beta = \frac{b}{2}\alpha - c$$

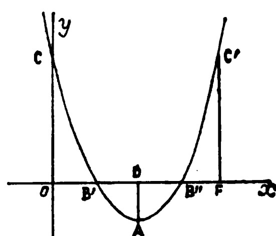
$$x'' - x' = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{a} + 4c}}{\sqrt{a}}$$

On peut alors augmenter a indéfiniment. Pour une valeur positive très grande de ce coefficient, α se rapproche de o, β tend vers $-c$, l'amplitude est très petite, et le sommet de la parabole est voisin du point C.

CHAPITRE VI.

CONSTRUCTION DE QUELQUES COURBES DU 2e ET DU 3e DEGRÉ.

57. Soit l'équation $y = x^2 - 4x + 3$.



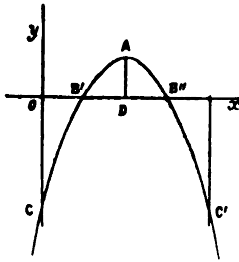
Pour $x = o$, $y = 3 = OC$, ce qui donne le point C. Pour $y = 3$, l'équation $x^2 - 4x = o$ donne $x = o$ et $x = 4 = oF$, ce qui donne le point C'. Les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3 = o$ sont $x' = 1 = oB'$, $x'' = 3 = oB''$. La courbe coupe l'axe des x aux points B' et B''.

On peut calculer O D et D A par les formules générales, ou par l'une des méthodes connues.

$$\alpha = OD = 2, \quad \beta = 3 - \frac{16}{4} = 3 - 4 = -1 = -DA.$$

Pour $x = \pm \infty$, $y = +\infty$. Entre les racines, qui sont réelles et inégales, toute valeur de x donne lieu à des ordonnées négatives, de signe contraire à celui de x^2.

Prenons maintenant l'équation $y = -x^2 + 4x - 3$ qui est la précédente changée de signe. En valeur ab-

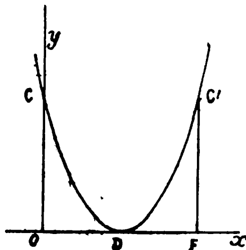


solue les résultats numériques seront les mêmes ; mais la convexité vers le bas sera remplacée par la concavité, et le minimum par le maximum. Entre les racines qui sont encore réelles et inégales, toute valeur de x donne lieu à des ordonnées positives, de signe contraire à celui de $-x^2$.

58. Dans le cas de l'équation

$$y = x^2 - 4x + 4$$

les racines sont réelles et égales. $x' = x'' = 2 = $ O D.



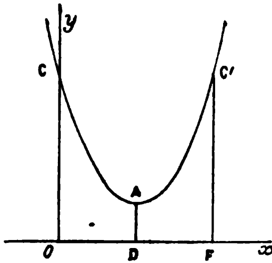
Pour $x = 0$, $y = 4 =$ 0 C.

Pour $y = 4$, $x = 4 =$ O F, ce qui donne le point C'. Le minimum de $y = (x - 2)^2$ a lieu pour $x = 2$, et ce minimum est zéro ; la parabole est tangente en D à l'axe des x. Comme il n'y a plus de valeurs de x entre les racines, le trinome a toujours le signe de $+ x^2$.

59. Considérons encore l'équation

$$y = x^2 - 4x + 5$$

Si on pose $y = o$, l'équation du second degré a ses racines imaginaires.



Pour $x = 0, y = 5 = \mathrm{OC}$ et pour $y = 5, x = 4 = \mathrm{OF}$; on a déjà les points C et C′. On peut écrire :

$$y = x^2 - 4x + 4 + 1 =$$

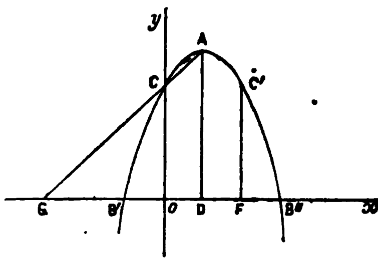
$(x - 2)^2 + 1$. Le minimum aura lieu si l'on pose

$$x = 2 = \alpha = \mathrm{OD}\ ;\ \text{alors } y = \beta = 1 = \mathrm{DA}.$$

La courbe a toutes ses ordonnées positives comme le premier terme.

60. Discutons la courbe représentée par l'équation

$$y = -3x^2 + 2x + 1$$



Pour $x = o$,

$$y = 1 = \mathrm{OC}$$

Pour $y = 1$,

$$\begin{cases} x = o \\ x = \dfrac{2}{3} = \mathrm{OF} \end{cases}$$

ce qui donne le point C′.

Si on résout l'équation

$$-3x^2 + 2x + 1 = o$$

$$x' = -\frac{1}{3} = -\mathrm{OB}',\quad x'' = 1 = \mathrm{OB}''$$

Si l'on cherche les coordonnées du sommet, soit à l'aide des formules générales $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = c - \dfrac{b^2}{4a}$ soit par la méthode du carré complet par exemple, on trouve $\alpha = \mathrm{OD} = \dfrac{1}{3}$, $\beta = \mathrm{DA} = \dfrac{4}{3}$.

Le point D est le milieu de B′ B″.

Le lieu des sommets, lorsque a seul varie dans l'équation $y = a x^2 + 2 x + 1$, est donné par l'équation

$$\beta = \alpha + 1$$

Pour $\alpha = o$, $\beta = 1 = \text{O C}$;

Pour $\beta = o$, $\alpha = -1 = -\text{O G}$.

La droite G C doit passer par le sommet particulier A.

61. En admettant que la densité de l'eau, qui varie avec la température, puisse être exprimée par la formule empirique

$$d = a t^2 + b t + 1$$

dans laquelle $a = -0{,}00000653,$

$$b = 0{,}00005294.$$

On demande la température du maximum de densité de ce liquide.

On peut écrire

$$d = a\left(t^2 + \frac{b}{a} t + \frac{1}{a}\right)$$

$$d = a\left(t^2 + 2\frac{b}{2a} t + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{1}{a}\right)$$

$$d = a\left(t + \frac{b}{2a}\right)^2 + 1 - \frac{b^2}{4a}$$

Comme a est négatif, le maximum aura lieu pour

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{0{,}00005294}{0{,}00001306} = 4^\circ{,}05.$$

Dans ce calcul, la densité est rapportée à celle qui existe à o°.

Le résultat obtenu serait plus exact si la formule em-

pirique était complétée par un terme du troisième degré.

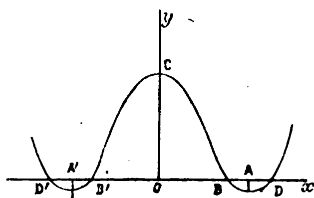
62. Construisons la courbe contenue dans la fonction bicarrée

$$y = 2\,x^4 - 3\,x^2 + 1.$$

L'équation peut se mettre sous la forme

$$y = 2\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

Pour $x = 0$, le binome élevé au carré aura sa plus grande valeur absolue $\frac{3}{4}$, donc il atteindra un maximum, et le maximum de y sera O C $= 1$.



Pour $x^2 = \frac{3}{4}$, on aura une valeur minimum $-\frac{1}{8}$; ce sera pour $x = \frac{\sqrt{3}}{2} =$ O A, et pour

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\text{O A}'.$$

Si l'on pose $x^4 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{1}{2} = 0$, on aura les points où la courbe coupe l'axe des x; on trouve

$$x' = 1 = \text{0 D}$$

$$x'' = -1 = -\text{0 D}'$$

$$x''' = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707 = \text{0 B}$$

$$x'''' = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}707 = -\text{0 B}'$$

Pour $x = \pm \infty$, $y = + \infty$.

Il est bon de remarquer qu'entre deux racines consécutives de cette fonction continue, il y a un minimum ou un maximum.

63. On demande le minimum de $x^2 + y^2$ sachant que $x + y = a$, ou que la somme $y + x$ est constante.

On peut résoudre cette question de plusieurs manières

1° On a $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$x^2 + y^2 = a^2 - 2xy$$

$x^2 + y^2$ sera minimum si xy est maximum, ou si $x = y$, ce qui donne $x = \frac{a}{2}$, et pour le minimum

$$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

2° L'expression qu'il s'agit de rendre minimum est

$$x^2 + (a - x)^2, \text{ ou bien } 2x^2 - 2ax + a^2,$$

on peut la mettre sous la forme

$$2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Si l'on pose $x = \frac{a}{2}$, le minimum sera $\frac{a^2}{2}$.

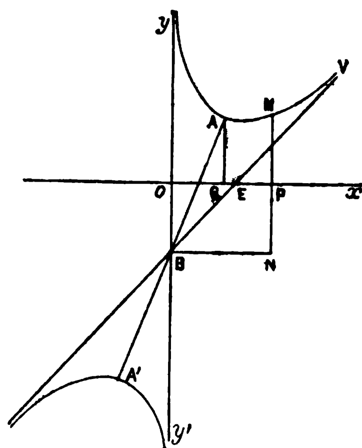
3° On peut encore considérer

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - z\right)^2 = \frac{a^2}{2} + 2z^2.$$

Le minimum aura lieu pour $z = o$.

La méthode du radical carré et celle de Fermat conduisent au même résultat.

64. L'équation $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ représente une hyperbole.



Pour

$$x = o, y = \frac{1}{o} = \pm \infty$$

l'axe $y\,y'$ est une asymptote.

On peut écrire

$$y = \frac{x(x-1)+1}{x}$$

$$= x - 1 + \frac{1}{x}$$

Comme le terme $\frac{1}{x}$ devient nul pour $x = \pm \infty$, l'équation $z = x - 1$ représente l'autre asymptote.

Cherchons les points où elle rencontre les axes : pour $x = o$, $z = -1 = -$ O B ; et pour $z = o$, $x = 1 =$ O E. Les sommets de la courbe seront sur la bissectrice B A de l'angle des asymptotes.

Cherchons la plus petite valeur que puisse recevoir la distance B M.

On a

$$\overline{BM}^2 = x^2 + (y+1)^2$$

L'équation de la courbe donne $y + 1 = x + \frac{1}{x}$

On a donc

$$\overline{BM}^2 = x^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

Il faut rendre minimum cette fonction.

Elle est égale à $2x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$.

Le produit des deux termes variables est constant ; leur somme sera minimum si l'on pose

$$2x^2 = \frac{1}{x^2}$$

d'où $$x^4 = \frac{1}{2}$$

et par suite $x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \pm 0{,}841$, ce qui donne le point G, pied de l'ordonnée du sommet A qui se trouve d'ailleurs sur la bissectrice de l'angle y B V. Le sommet A′ est symétrique du sommet A par rapport au point B.

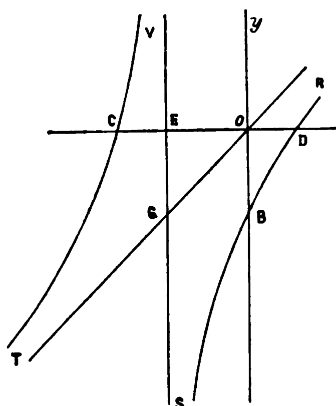
On peut chercher les points du maximum et du minimum de la fonction y. On a

$$y = -1 + x + \frac{1}{x}$$

Les deux termes x et $\frac{1}{x}$ ont un produit constant ; si on les suppose positifs, leur somme sera minimum pour $x = \frac{1}{x}$, ce qui donne $x = +1$, et $y = -1 + 1 + \frac{1}{1} = 1$.

Si on prend x avec le signe moins, on aura $x = -x'$, d'où $y = -1 - \left(x' + \frac{1}{x'}\right)$; le maximum de y aura lieu pour le minimum de $x' + \frac{1}{x'}$, ou pour $x' = 1$; donc $x = -1$. Les points du maximum et du minimum diffèrent des sommets A et A′.

65. L'équation $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ représente une hyperbole placée tout autrement.



Pour $x = o$,

$y = -1 = -$ O B,

ce qui donne le point B.

Si on égale à zéro le numérateur on obtient

$x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}61 = -$OC

et

$x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = +0{,}61 =$ OD

La courbe passe par les points C et D.

Pour $x = -1 = -$ E O, $y = \pm \infty$; la parallèle E V est une asymptote. On a d'ailleurs

$$y = x - \frac{1}{x+1}$$

Comme le second terme est nul pour $x = \infty$, l'équation $z = x$ donne l'autre asymptote, la bissectrice O R. Les deux branches de l'hyperbole sont R B S, et V C T, symétriques par rapport au point G. La courbe ne présente ni maximum ni minimum par rapport à l'axe des abscisses. Si on essaie la méthode du radical carré, la quantité soumise au radical est toujours positive.

66. Quelle relation doit-il y avoir entre deux nombres qui font autant ajoutés que multipliés ?

L'équation est $x + y = x\,y$

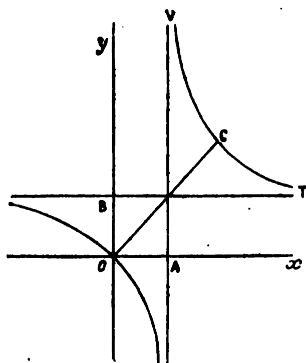
ou bien $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1.$

Il faut que les valeurs inverses des deux nombres fassent une somme égale à l'unité. Par exemple, si l'un des nombres est 6, sa valeur inverse est $\frac{1}{6}$, dont le complément est $\frac{5}{6}$, le second nombre sera donc $\frac{6}{5}$.

On a $$y = \frac{x}{x-1},$$

ou encore $$y = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Pour que x et y soient entiers, il faut que 1 soit divisible par $x - 1$, ce qui suppose $x - 1 = 1$, et par suite $x = 2$, et $y = 2$. Construisons la courbe qui est celle du n° 14, quoique la forme de l'équation soit un peu différente.



Pour $x = o$, $y = o$; la courbe passe par l'origine.

Pour $x = 1$, $y = \pm \infty$; la droite A V est une asymptote. Pour $x = \pm \infty$, $y = 1$; la droite B T est la seconde asymptote de l'hyperbole. Pour $x = 2$, $y = 2$; ce qui donne l'un des sommets C.

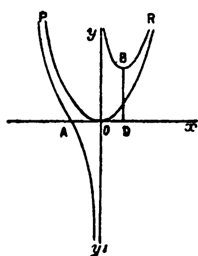
Si x varie entre $+1$ et $+\infty$, y varie entre $+\infty$ et $+1$. Les valeurs positives de x et de y sont plus grandes que l'unité. On peut d'ailleurs le vérifier. On a $x + y > x$. Si y était une fraction, on aurait $x > x\,y$, et par suite

$$x + y > x > x\,y.$$

La somme de deux fractions positives n'est donc jamais égale à leur produit. Pour les nombres positifs la branche V C T répond à la question.

67. Etudions la courbe du troisième degré

$y = \frac{x^3 + 1}{x}$, qui présente une particularité remarquable.



Pour $x = 0$, $y = \pm \infty$.

L'axe $y y'$ est une asymptote, qui sépare la courbe en deux branches (n° 37).

On peut écrire $y = x^2 + \frac{1}{x}$

la parabole $z = x^2$ est une courbe asymptote à la proposée, car la différence $y - z$ tend vers zéro lorsque x croît au-delà de toute limite. Soit P O R cette parabole.

Si l'on pose $x^3 + 1 = o$, $x = -1 = -$ O A ; la courbe passe au point A. La branche de gauche est indiquée par ce point et les deux asymptotes rectiligne et curviligne. Quant à l'autre branche, si l'on cherche le minimum par la méthode de Fermat en écrivant

$$\frac{x^3 + 1}{x} = \frac{(x + h)^3 + 1}{x + h}$$

On trouve $x^3 = \frac{1}{2}$, d'où $x = 0, 79 = $ O D ; le minimum

$$\text{D B} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 1,89 \text{ ;}$$

d'où la branche R B y.

68. Déterminer les limites entre lesquelles demeurent comprises les valeurs de l'expression $\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}$ lorsqu'on fait varier x en lui attribuant des valeurs réelles quelconques (Baccalauréat ès-sciences, Paris 1882).

Posons $\frac{(2x+1)^2}{x^2+1} = m$

d'où l'on tire

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-m^2+5m}}{4-m}$$

Pour que le radical soit réel, pour que $-m^2+5m$ soit positif, il faut prendre m en dedans des racines de l'équation

$$5m - m^2 = o.$$

Or ces racines sont $m' = o$, $m'' = 5$. On aura donc

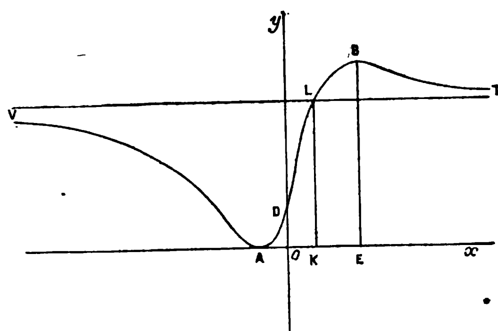
$$o < m < 5.$$

Le minimum sera zéro pour $x = -\frac{1}{2}$, et le maximum, 5, pour $x = 2$.

Si l'on se bornait à ce résultat, on ne se rendrait guère compte de la marche de la fonction lorsque x varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Construisons la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{(2x+1)^2}{x^2+1}.$$



Pour $x = o$, $y = 1 = OD$. La courbe passe en D.

Le minimum est en A pour $x = -\frac{1}{2}$, et le maximum en B pour $x = 2 = OE$.

On peut écrire

$$y = \frac{4x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1} = \frac{4x^2 + 4 - 4 + 4x + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{4(x^2 + 1) + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

d'où

$$y = 4 + \frac{4x - 3}{x^2 + 1}.$$

La fraction est nulle pour $x = \pm \infty$, comme on le voit en la mettant sous la forme $\dfrac{4 - \dfrac{3}{x}}{x + \dfrac{1}{x}}$; l'équation $z = 4$ donne l'asymptote V T.

Voyons si la courbe en allant de D en B traverse cette asymptote. Posons $y = 4$; on a

$$4 = 4 + \frac{4x - 3}{x^2 + 1}$$

ou bien

$$\frac{4x - 3}{x^2 + 1} = o,$$

d'où $\qquad x = \frac{3}{4} = \text{OK}$; ce qui donne le point L.

Si dans l'expression de y, sous la forme

$$y = 4 + \frac{4 - \frac{3}{x}}{x + \frac{1}{x}}$$

On fait $x = \pm \infty$, on trouve $y = 4$.

Si on donne à x une grande valeur — N, on a

$$y = 4 - \frac{4 + \frac{3}{N}}{N + \frac{1}{N}}\text{; la valeur de } y \text{ est plus petite que } 4\text{ ;}$$

à gauche, la courbe est au-dessous de l'asymptote. Si on donne à x une grande valeur + N, on a

$$y = 4 + \frac{4 - \frac{3}{N}}{N + \frac{1}{N}}$$

Dans la partie droite, la valeur de y surpasse 4, la courbe reste au-dessus de l'asymptote. D'ailleurs la courbe est toujours au-dessus de l'axe des x, car les deux termes de y sont essentiellement positifs quel que soit le signe de x qui n'entre que dans des carrés.

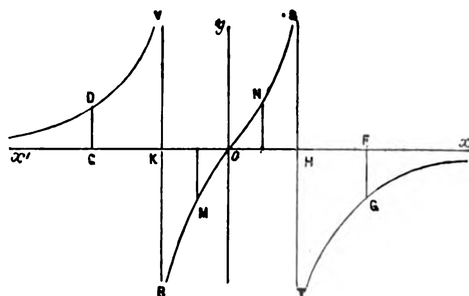
69. Quelles sont les variations de la fonction

$$y = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Si l'on résout l'équation par rapport à x, on obtient

$$x = -\frac{1}{2y} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4y^2}}$$

Le radical étant toujours réel quel que soit y, il n'y a ni maximum ni minimum.



Pour $x = o$, $y = o$; la courbe passe à l'origine.

Pour $x = \pm 1$, $y = \frac{\pm 1}{o} = \pm \infty$

soit $OH = OK = 1$,

les droites S T et V R sont deux asymptotes.

On peut écrire $y = \dfrac{1}{\frac{1}{x} - x}$

Pour $x = \pm \infty$, $y = o$

L'axe $o\,x$ est la troisième asymptote.

Les asymptotes V R et S T séparent les trois branches de la courbe (37).

Soit $x = -2 = -OC$; $y = \frac{-2}{1-4} = \frac{2}{3} = CD$,

ce qui donne le point D appartenant à la branche x' D V.

Soit $x = 2 = OF$; $y = \frac{2}{1-4} = -\frac{2}{3} = -FG$,

ce qui donne le point G appartenant à la branche T G x.

Si l'on fait $x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{2}{3}$, ce qui donne deux points M et N appartenant à la troisième branche qui passe par l'origine O.

Si l'on pose $x = \alpha$, on a $y = \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}$, ce qui donne un point de la courbe.

Si l'on fait ensuite $x = -\alpha$, on a $y = \frac{-\alpha}{1 - \alpha^2}$; ce qui donne un autre point de la courbe. Pour ces deux points, les coordonnées sont égales en valeur absolue, mais de signes contraires; la courbe est symétrique par rapport à l'origine (n° 9).

Les résultats de la discussion peuvent se prévoir ou se vérifier. Lorsque x est compris entre -1 et $+1$, le dénominateur de y est positif, et le numérateur est d'abord négatif, puis positif, ce qui donne la branche intérieure R O S.

Lorsque x est plus grand que l'unité en valeur absolue, le dénominateur est toujours négatif; pour $x < -1$, le numérateur est négatif; y est donc positif, dans la branche x' D V.

Pour $x > 1$, le dénominateur est négatif, mais le numérateur est positif; y est donc négatif, dans la branche T G x.

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DE QUELQUES INÉGALITÉS.

70. A quelle condition le trinome

$$y = a x^2 + b x + c$$

sera-t-il toujours soit positif, soit négatif, pour toutes les valeurs de x positives ou négatives ?

Considérons l'équation $a x^2 + b x + c = o$.

Si ses racines étaient réelles et inégales, en donnant à x une valeur prise entre les racines, on rendrait le trinome négatif, si a avait le signe $+$, ou bien positif, si a avait le signe $-$; et si l'on prenait pour x une valeur en dehors des racines, on donnerait au trinome le signe de a. Le signe du trinome dépendrait donc des valeurs de x. Il faut donc que les racines soient imaginaires; alors y aura toujours le signe du terme $a x^2$.

La première condition est donc

$$b^2 - 4 a c < o, \text{ ou } b^2 < 4 a c.$$

Comme b^2 est positif, il faut que $a c$ le soit ; les facteurs a et c devront avoir le même signe. Pour que le trinome soit toujours positif, il faudra que a soit positif, ainsi que c. Pour que le trinome soit toujours négatif, a devra être négatif, ainsi que c.

En résumé, pour que le trinome soit positif, on écrira

$$b^2 - 4ac < o$$
$$a > o$$

et pour que le trinome soit toujours négatif, on écrira

$$b^2 - 4ac < o$$
$$a < o$$

71. On demande entre quelles limites peut varier la quantité h, pour que l'inégalité $x^2 + 2hx + h > \frac{3}{16}$ soit vérifiée pour toutes les valeurs de x positives ou négatives.

(Baccalauréat ès sciences, Paris, 1884.)

On doit avoir

$$x^2 + 2hx + h - \frac{3}{16} > o.$$

Le signe de x^2 est positif ; la seule condition à poser sera

$$h^2 - \left(h - \frac{3}{16}\right) < o$$

ou bien

$$h^2 - h + \frac{3}{16} < o.$$

Il est facile de résoudre cette nouvelle inégalité qui ne contient qu'une variable.

L'équation $h^2 - h + \frac{3}{16} = o$, a pour racines

$$h' = \frac{1}{4},\ h'' = \frac{3}{4}.$$

Pour que ce trinome soit négatif, comme son premier terme h^2 est positif, il faut prendre h entre ses racines ; on aura

$$\frac{1}{4} < h < \frac{3}{4}$$

Le coefficient h admet une infinité de valeurs entre ces deux limites. A chacune de ces valeurs correspond une parabole particulière dont l'équation est,

$$y = x^2 + 2h_1 x + h_1$$

et qui a toutes les ordonnées supérieures à $\frac{3}{16}$.

2° Méthode.

Soit $$y = x^2 + 2hx + h - \frac{3}{16}.$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -h, \quad \beta = c - \frac{b^2}{4a} = h - \frac{3}{16} - h^2.$$

On a encore à résoudre l'inégalité

$$-h^2 + h - \frac{3}{16} > o, \quad \text{qui donne}$$

$$\frac{1}{4} < h < \frac{3}{4}.$$

La parabole aura un minimum, car le signe de x^2 est positif ; et ce minimum sera $\beta > o$; donc le trinome sera toujours positif.

Prenons par exemple $h = \frac{1}{2}$; on a

$$y = x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = x^2 + x + \frac{5}{16} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}$$

L'ordonnée est essentiellement positive.

3° Méthode.

La parabole dont l'équation est

(1) $$y = x^2 + 2hx + h - \frac{3}{16}$$

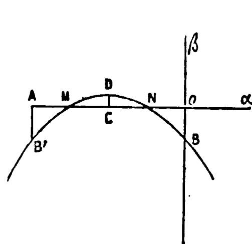
présentera un minimum, car le signe de x^2 est positif. Les coordonnées du sommet sont

$$\alpha = -h, \beta = h - \frac{3}{16} - h^2.$$

Si on élimine h entre ces équations, on aura le lieu des sommets de toutes les paraboles exprimées par l'équation (1)
on obtient

(2) $$\beta = -\alpha^2 - \alpha - \frac{3}{16}$$

Ce lieu est lui-même une parabole qu'il s'agit de construire.



Pour $\alpha = o$, $\beta = -\frac{3}{16} = -\text{O B}$.

Pour $\beta = -\frac{3}{16}$, $\alpha = -1 = -\text{O A}$

Les racines sont

$$\alpha' = -\frac{3}{4} = -\text{O M}$$

$$\alpha'' = -\frac{1}{4} = -\text{O N}$$

Le maximum a lieu pour $\alpha = -\frac{1}{2} = -\text{O C}$; alors

$$\beta = \frac{1}{16} = \text{C D}$$

pour $\alpha = \pm \infty, \beta = -\infty.$

β est positif si l'on a

$$-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{4}$$

et par suite

$$-\frac{3}{4} < -h < -\frac{1}{4}$$

En changeant de signe, l'inégalité change de sens ; on aura donc

$$\frac{3}{4} > h > \frac{1}{4}$$

Si l'on construit une parabole particulière en prenant h entre ces limites, son sommet sera sur l'arc M D N, et elle sera convexe vers le bas ; ses ordonnées seront toutes positives. Mais si l'on construit une autre parabole particulière en prenant h égal à $\frac{1}{5}$ par exemple, son sommet sera sur l'arc N B ; elle aura des ordonnées négatives si l'on prend x entre les racines. On fera bien de dessiner avec soin le lieu des sommets et les paraboles particulières. On verra que, dans chaque cas, les coordonnées du point minimum vérifient l'équation du lieu des sommets.

72. Quelles valeurs faut-il donner à h pour que le trinome

$$(h - 2)\, x^2 + 2\,(2\,h - 3)\, x + 5\,h - 6$$

soit constamment positif quel que soit x ?

(Enseignement secondaire des jeunes filles, certificat d'aptitude, 1886.)

Si le premier terme est positif et si les racines sont imaginaires, le trinome aura toujours le signe positif de son premier terme ; on doit donc avoir les conditions

$$h > 2$$
$$(2h - 3)^2 - (h - 2)(5h - 6) < o.$$

Cette dernière inégalité conduit à la suivante :

$$-h^2 + 4h - 3 < o.$$

Les racines de l'équation $h^2 - 4h + 3 = o$ sont

$$h' = 1$$
$$h'' = 3.$$

Pour que le trinome soit négatif comme son premier terme, toute valeur de h sera prise en dehors des racines ; on posera

$$h < 1, h > 3.$$

L'inégalité $h > 2$, exclut $h < 1$; on aura donc enfin

$$3 < h < +\infty.$$

Ainsi on pourra prendre pour h un nombre quelconque plus grand que 3.

2ᵉ Méthode.

Les coordonnées du sommet de la parabole sont

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{3-2h}{h-2}$$

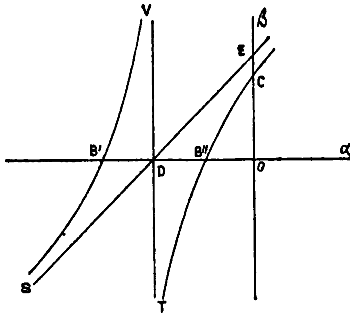
$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} = 5h - 6 - \frac{(2h-3)^2}{h-2}$$

Si on élimine h entre ces deux équations, on obtient

$$\beta = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 3}{2 + \alpha}$$

C'est l'équation d'une hyperbole sur laquelle se trouvent tous les sommets des paraboles lorsque h varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Construisons cette courbe.



Pour $\alpha = o, \beta = \frac{3}{2} = o\,c$

Si $\beta = o$, on aura

$$\alpha^2 + 4\alpha + 3 = o$$
$$\alpha' = -3 = -\text{O B}'$$
$$\alpha'' = -1 = -\text{O B}''$$

Pour $\alpha = -2, \beta = \pm \infty$; ce qui donne l'asymptote V T.

Pour avoir la seconde, on divise le numérateur de β par son dénominateur après les avoir ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de la variable ; on obtient

$$\beta = \alpha + 2 - \frac{1}{\alpha + 2}$$

L'équation $z = \alpha + 2$ représente la seconde asymptote.

Pour $\alpha = o$, on a $z = 2 = \text{O E}$.

Pour $z = o$, on a $\alpha = -2 = -\text{O D}$.

Cette droite coupe les axes en E et en D ; la branche de gauche est V B' S, et celle de droite C B'' T.

C'est entre $\alpha = -3$, et $\alpha = -2$, que β est positif, comme aussi entre $\alpha = -1$, et $\alpha = +\infty$. Il faut d'ailleurs que β soit un minimum, afin que toute valeur de y, alors supérieure à β, soit positive ; il faut donc que l'on ait $h - 2 > o$.

Or $\quad \alpha = \frac{3 - 2h}{h - 2}$

Posons d'abord

$$\frac{3 - 2h}{h - 2} > -3$$

Comme $h - 2$ est positif, on peut multiplier par ce dénominateur sans changer le sens de l'inégalité.

On a successivement

$$\frac{3 - 2h}{h - 2} > -3$$

$$3 - 2h > -3h + 6$$

$$h > 3$$

Soit ensuite

$$\frac{3 - 2h}{h - 2} < -2$$

on en déduit

$$3 < 4$$

quel que soit h, qui pourra ainsi varier entre

$$+3 \text{ et } +\infty.$$

Venons à l'autre intervalle de B″ à $+\infty$;

Posons :

$$\frac{3 - 2h}{h - 2} > -1$$

$$3 - 2h > -h + 2$$

$$1 > h$$

Cette inégalité, et $h > 2$, sont en contradiction.

Il reste donc le résultat précédent

$$3 < h < +\infty$$

Ainsi les paraboles auront toutes leur sommet sur l'arc B′ V, comme on pourra le vérifier en prenant par exemple $h = 4$ et en construisant la parabole particulière $y = 2x^2 + 10x + 14$. Elle est convexe vers le bas, et l'ordonnée de son sommet est positive. Elle n'a donc pas d'ordonnées négatives.

73. On veut que la courbe représentée par l'équation $y = (2 - h)x^2 + hx + 1$ n'ait pas d'ordonnées négatives. On demande entre quelles limites on peut prendre l'indéterminée h.

Le problème sera résolu si le coefficient $a = 2 - h$, est positif, et si l'équation

$$(2-h)x^2 + hx + 1 = o$$

a ses racines imaginaires ou égales.

On posera donc

$$2 - h > o$$
$$h^2 - 4(2 - h) < o.$$

L'équation

$$h^2 + 4h - 8 = o$$

a pour racines :

$$h' = -2 - 2\sqrt{3} = -5,464$$
$$h'' = -2 + 2\sqrt{3} = 1,464.$$

Son premier terme étant positif, pour que le trinome soit négatif, on prendra h entre les racines, ce qui donne

$$-2 - 2\sqrt{3} < h < -2 + 2\sqrt{3}$$

Comme $2\sqrt{3} - 2 = 2 \times o,732\ldots$, l'inégalité $h < 2$ sera satisfaite.

Cherchons encore le lieu géométrique des sommets de toutes les paraboles lorsque h reçoit une infinité de valeurs.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-h}{4 - 2h}; \beta = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{h^2}{8 - 4h}.$$

Si on élimine h entre ces deux équations, on obtient

$$\beta = 1 + \frac{\alpha^2}{\alpha - \frac{1}{2}}$$

Construisons l'hyperbole.

Pour $\alpha = o$, $\beta = 1 = oc$.
Pour $\beta = o$, on a

$$\alpha - \frac{1}{2} + \alpha^2 = o.$$

La courbe coupe l'axe des x aux points B′ et B″ donnés par

$$\alpha'' = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} = -1{,}366 = -\mathrm{O\,B''}$$

$$\alpha' = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} = 0{,}366 = \mathrm{O\,B'}$$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \pm\infty$; ce qui donne l'asymptote V T.

Par une division, on a

$$\beta = \alpha + \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{\alpha - \frac{1}{2}}$$

l'équation de la seconde asymptote est

$$z = \alpha + \frac{3}{2}.$$

Pour $\alpha = o$, $z = \frac{3}{2} = \text{O E}$

Pour $z = o$, $\alpha = -\frac{3}{2} = -\text{O G}$

Cette asymptote est R S.

L'ordonnée β du sommet de la parabole serait positive sur l'arc B′ C B″, et sur la branche V D R. Examinons ces deux cas.

1° Pour l'arc B′ C B″, on a

$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} < \alpha < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Or $\alpha = \frac{-h}{(2-h)}$; le facteur $2-h$ étant positif on a donc

$$-1-\sqrt{3} < \frac{-h}{2-h} < -1+\sqrt{3}$$

On déduit de là

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} < h < \frac{2+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Ces limites ne diffèrent pas de celles qui ont été déjà trouvées et qui sont

$$-2-2\sqrt{3} \text{ et } -2+2\sqrt{3}$$

En effet, par une transformation souvent employée on a

$$\frac{2-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{(2-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{1}$$

$$\frac{2+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(2+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}-2}{1}$$

Ainsi l'arc B′ C B″ répond bien à la question.

2° Quant à la branche V D R

On a $\alpha > \frac{1}{2}$.

Or $\alpha = -\frac{h}{2(2-h)}$, d'où $h = 2 + \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}}$

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, $h > 2$

La parabole dont l'équation est

$$y = (2-h)x^2 + hx + 1$$

est convexe vers le haut ; d'ailleurs les racines du trinome sont réelles, et si l'on prend x en dehors, les ordonnées sont négatives. Donc la branche V D R ne répond pas à la question.

On prendra par exemple $\alpha = 1,5$; ou $h = 3$.

On construira la courbe représentée par

$$y = -x^2 + 3x + 1 = -(x^2 - 3x - 1)$$

$$= -(x - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 1)$$

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$$

Pour $x = \frac{3}{2} = o\,k$, $y = \frac{13}{4}$; l'abscisse du sommet H est $x = \frac{3}{2}$; elle donne un maximum, et non un minimum ; pour $x = \pm\infty$, $y = -\infty$. La fonction aura des valeurs négatives.

Si dans la fonction β on prend $\alpha = x = \frac{3}{2}$, on obtient $\beta = \frac{13}{4}$; c'est une vérification.

CHAPITRE VIII.

ÉQUATIONS DONT UN DÉNOMINATEUR RENFERME L'INCONNUE. ÉQUATIONS DONT UN FACTEUR EST UNE FONCTION ÉTRANGÈRE A LA QUESTION.

74. Dans la construction d'une courbe, lorsqu'on cherche les points où elle coupe l'axe des x, on a une équation à résoudre. Il est important de le faire sans introduire de solution étrangère qui amènerait des contradictions, et empêcherait la construction de la courbe. Ce genre de difficulté se rencontre lorsque l'équation à résoudre présente à l'un de ses termes un dénominateur qui est une fonction de l'inconnue, et lorsqu'en chassant ce dénominateur, l'équation nouvelle donne une racine qui annule ce dénominateur. Il sera aisé de montrer la raison de cette difficulté, d'expliquer pourquoi on la rencontre assez rarement, et enfin de proposer de bons procédés pour écarter la difficulté lorsqu'elle se présente.

Les anciens désignaient les fractions sous le nom de nombres rompus, par opposition aux nombres entiers. Pour les Arabes, faire disparaître un dénominateur, c'était guérir la fracture du nombre rompu, par un artifice appelé al-jebr ; de sorte que l'algèbre doit son nom à une opération qui n'est pas toujours légitime.

75. Soit l'équation

$$x + \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{2-x}{x-1}$$

. Si l'on chasse le dénominateur, l'équation

$$x(x-1) + x = x - 1 + 2 - x$$

admet deux racines $x' = -1$, $x'' = 1$.

La dernière annule le dénominateur. Si on la substitue dans l'équation proposée, on obtient

$$1 + \frac{1}{0} = 1 + \frac{1}{0}$$

Cette fausse identité pourrait tromper les commençants. Posons $x = 1 + \alpha$.

Pour que la racine $x'' = 1$ pût convenir, il faudrait que α fût égal à zéro. L'équation proposée devient successivement

$$1 + \alpha + \frac{1+\alpha}{\alpha} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha} - 1$$

On peut retrancher de part et d'autre la quantité $\frac{1}{\alpha}$, quelle que soit la valeur de α, si voisine qu'elle soit de zéro ; il reste $\alpha = -2$; on a donc $x = 1 - 2 = -1$. Ainsi la racine $x' = -1$ convient seule à l'équation primitive.

On peut encore le voir autrement. En réunissant les termes qui ont le même dénominateur, l'équation donne

$$x - 1 = \frac{2-2x}{x-1} = 2\frac{1-x}{x-1} = -2\frac{x-1}{x-1}$$

L'expression $\frac{x-1}{x-1}$ est toujours égale à l'unité pour toute valeur de x, si voisine qu'elle soit de la fausse racine $x'' = 1$. On a donc

$$x - 1 = -2, \text{ d'où } x = -1.$$

76. Prenons un autre exemple :

$$\frac{x^3}{x-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$$

En chassant le dénominateur, on a successivement

$$x^3 = 2(x-1) + x$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Cette équation est du 3e degré ; on voit aisément qu'elle admet la racine $x = 1$; le polynome est donc divisible par $x - 1$; le quotient est $x^2 + x - 2$; l'équation devient

$$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

Elle sera satisfaite si l'on a

$$x - 1 = 0$$

ou bien

$$x^2 + x - 2 = 0$$

On obtient les trois racines

$$x' = 1 \,;\; x'' = -2 \,;\; x''' = 1.$$

Mettons dans l'équation primitive la racine $x' = 1$; il vient

$$\frac{1}{0} = 2 + \frac{1}{0}$$

Ce résultat qui paraît contradictoire, ne signifie rien en réalité. Posons encore $x = 1 + \alpha$.

L'équation primitive donne

$$\frac{(1+\alpha)^3}{\alpha} = 2 + \frac{1+\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3}{\alpha} = 2 + \frac{1}{\alpha} + 1$$

$$3 + 3\alpha + \alpha^2 = 3$$

$$\alpha(\alpha+3) = o$$

D'où $\alpha' = o, \ \alpha'' = -3$

On a donc $x' = 1, \ x'' = -2.$

L'équation n'admet que deux racines, et non trois comme l'équation obtenue par la disparition du dénominateur. Celle-ci avait deux racines égales ; l'une d'elles était étrangère à la question.

On peut arriver autrement à ce résultat. L'équation donne successivement

$$\frac{x^3 - x}{x-1} = 2$$

$$\frac{x(x^2-1)}{x-1} = 2$$

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{x-1} = 2$$

$$x(x+1) - 2 = o$$

$$x^2 + x - 2 = o$$

On retrouve l'équation dont les racines sont 1 et —2.

La première convient, bien qu'elle annule le dénominateur, ou plutôt bien qu'elle soit égale à celle qui annule ce dénominateur.

77. Soit en général l'équation

$$A = \frac{B}{x-a}$$

A et B étant des fonctions de x, entières ou fractionnaires.

1° Supposons d'abord que le facteur $x - a$ ne soit pas contenu dans B. L'équation

$$A(x - a) = B$$

n'aura aucune racine égale à a. En multipliant par $x - a$, qui n'est pas nul, on n'introduit aucune racine étrangère. Ce cas est celui qui se présente le plus fréquemment. Il est alors permis de chasser les dénominateurs.

2° Mais supposons que l'on ait $B = B'(x - a)$.

La véritable équation sera

$$A = B' \frac{(x-a)}{x-a}, \text{ ou bien } A = B'$$

et d'ailleurs elle pourra bien avoir encore pour racine $x = a$, dans certains cas particuliers.

En faisant usage de l'équation

$$A(x - a) = B$$

c'est-à-dire, de l'équation

$$A(x - a) = B'(x - a)$$

aux solutions de la véritable équation

$$A = B'$$

on ajoute la solution étrangère $x = a$.

78. On introduit des racines étrangères lorsque pour chasser les dénominateurs qui renferment l'inconnue, on ne multiplie pas seulement les deux membres de l'équation par leur plus petit multiple, mais par le produit de tous les dénominateurs.

Considérons par exemple l'équation

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x^2-1}.$$

1° Si on multiplie par x^2-1, on aura

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)(x^2-1)=1.$$

Comme le second membre, qui est l'unité, n'est pas divisible par $x-1$, ni par $x+1$, il a été permis de chasser le dénominateur x^2-1. L'équation devient

$$2x-1=o$$

d'où $$x=\frac{1}{2}.$$

2° Supposons maintenant que l'on chasse les dénominateurs du premier membre, on aura

$$x+1+x-1=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1}$$

ou bien $$2x=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1}.$$

Si on chasse maintenant le dénominateur x^2-1, sans remarquer que B est divisible par ce dénominateur, on aura

$$2x(x^2-1)=(x+1)(x-1)$$

ou bien $$(2x-1)(x^2-1)=o.$$

Ce qui donne encore $x'=\frac{1}{2}$; mais on a deux solutions étrangères $x''=1$, $x'''=-1$.

Il est donc nécessaire d'employer la méthode du plus petit multiple. Il ne s'agit pas seulement ici de simplicité, mais d'exactitude, ce qui est plus important.

Mais il ne faut pas oublier que si une racine de l'équation transformée vient annuler ce multiple, ce qui est d'ailleurs très rare, il faut la vérifier, comme dans les exemples déjà étudiés, et qui sont des cas particuliers dépendant de la théorie exposée au n° 75.

Soit par exemple l'équation

$$\frac{1}{x-1}+\frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{4}{(x+1)(x-2)}$$

Si l'on multiplie chaque terme par le plus petit multiple qui est $(x^2-1)(x-2)$, on arrive à l'équation $x^2-\frac{5}{2}x+1=o$, dont les racines sont $x'=\frac{1}{2}$, et $x''=2$.

La seconde annule un dénominateur ; il faut la vérifier.

On peut d'abord multiplier par $x-1$ et par $x+1$, facteurs qui ne sont pas nuls ; on obtient

$$x+1+\frac{x^2}{x-2}=\frac{4(x-1)}{x-2}$$

Posons $x=2+\alpha$, ou $x-2=\alpha$.

On a successivement

$$3+\alpha+\frac{(2+\alpha)^2}{\alpha}=\frac{4(1+\alpha)}{\alpha}$$

$$3+\alpha+\frac{4+4\alpha+\alpha^2}{\alpha}=\frac{4+4\alpha}{\alpha}$$

$$3+\alpha+\alpha=o$$

$$\alpha=-\frac{3}{2}\text{ ; d'où } x=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

La racine unique est donc différente de $x''=2$.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat en mettant l'équation primitive sous la forme.

$$A = \frac{B}{x - 2}$$

on a $$x + 1 = \frac{4x - 4 - x^2}{x - 2}$$

Ici B est divisible par $x - 2$

on a $$x + 1 = -x + 2$$

d'où $$x = \frac{1}{2}.$$

79. Il est bon de compléter les observations précédentes par une remarque importante. Supposons que l'énoncé d'un problème conduise à une équation

$$f(x). F(x, n) = o$$

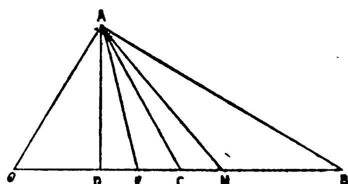
et que l'on cherche la valeur de x qui satisfasse à cette équation pour une valeur particulière de n. Comme x est, par hypothèse, une fonction de n, sa valeur doit être tirée de l'équation

$$F(x, n) = o.$$

L'équation $f(x) = o$ donnera souvent une solution étrangère. Supposons pourtant que l'équation $f(x) = o$, donne une valeur particulière $x = a$ satisfaisant à la question pour $n = n_1$; elle devra satisfaire à l'équation générale modifiée $F(x, n_1) = o$; celle-ci donnera donc $x = a$. On a donc le droit de négliger le facteur $f(x)$ sans perdre aucune solution. Il y a même avantage à le faire ; car l'équation $f(x) = o$ ne fait pas connaître la valeur $n = n_1$ à laquelle répond la racine $x = a$, ce qui peut donner une idée fausse. Cette remarque sera bientôt appliquée à des exemples pris dans la géométrie (nos 81, 82 et 83).

CHAPITRE IX.

QUELQUES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE. — VARIATION DE LA CONSTANTE.



80. Les côtés d'un triangle rectangle sont 3, 4 et 5. La distance du sommet de l'angle droit à un point M pris sur l'hypoténuse est représentée par l. Déterminer le point M de manière à ce que le rapport de l^2 au produit des deux parties de l'hypoténuse soit égal à un nombre donné k. Quel est le nombre de solutions.

(Baccalauréat ès-sciences, Besançon, 1886.)

Abaissons la perpendiculaire A D sur B O, et joignons le sommet A au milieu C de l'hypoténuse.

Soient $A\,O = 3$

$A\,B = 4$

$B\,O = 5$

$O\,M = x$

$D\,M = h$

On aura les équations

$$\frac{l^2}{x\,(5-x)} = k$$

$$3^2 = l^2 + x^2 - 2\,h\,x$$

$$4^2 = l^2 + (5-x)^2 + 2\,h\,(5-x)$$

Il s'agit d'éliminer h et l.

$$h = \frac{l^2 + x^2 - 9}{2x} = \frac{16 - l^2 - (5 - x)^2}{2(5 - x)}$$

On tire de là

$$l^2 = \frac{5x^2 - 18x + 45}{5}$$

Cette quantité est essentiellement positive.

Au moyen de la première équation, on obtient

$$k = \frac{5x^2 - 18x + 45}{5x(5 - x)}$$

Ou bien

(1) $\qquad 5(k + 1)x^2 - (25k + 18)x + 45 = o.$

On en déduit

$$x = \frac{25k + 18}{10(k + 1)} \pm \frac{\sqrt{(25k)^2 - 24^2}}{10(k + 1)}$$

En égalant à zéro la quantité soumise au radical on a pour racines $k' = -\frac{24}{25}$, $k'' = \frac{24}{25}$.

Pour que le trinome soit positif, il faut prendre k en dehors des racines. A cette condition, il y aura pour chaque valeur de k, deux valeurs de x, ou deux positions du point M.

$k < -\frac{24}{25}$. Ce maximum aura lieu pour $x = -15$

$k > \frac{24}{25}$. Ce minimum aura lieu pour $x = \frac{15}{7} =$ B E.

D'ailleurs pour $x = o$, ou pour $x = 5$, le rapport k est infini.

Considérons les deux racines qui répondent à une

valeur particulière de k prise entre $\frac{24}{25}$ et $+\infty$. Supposons la condition $x < 5$. En substituant ce nombre à la place de x dans le trinome (1), dont le 1er terme est positif, on obtient $+ 80$. Donc 5 est en dehors des racines. On a

$$5 < x' < x''$$

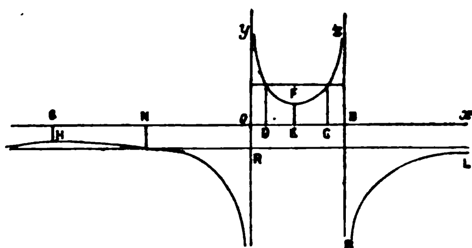
ou bien
$$x' < x'' < 5$$

Or on a d'ailleurs $x < 5$. C'est la seconde ligne qui est exacte. Ainsi, les deux racines réelles et positives conviennent à la question particulière. Par exemple, pour $k = 1$, $x' = \frac{9}{5} = \text{O D}$, $x'' = \frac{5}{2} = \text{O C}$. Le point M est alors au point D, pied de la hauteur, ou au point C, milieu de l'hypoténuse ; dans ces deux cas, l est la moyenne proportionnelle entre les deux segments de cette ligne. Le minimum a lieu en un point E pour lequel $\text{O E} = \frac{15}{7}$.

Si le point M se meut de O vers B, lorsqu'il est en O, $k = \infty$; ce rapport décroit vers $\frac{24}{25}$, en passant par l'unité, au point D ; puis il augmente, passe par l'unité au point C, et redevient infini au point B. Le rapport passe deux fois par chaque valeur particulière comprise entre $\frac{24}{25}$ et $+\infty$.

Représentons k par y, et construisons la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{5x^2 - 18x + 45}{5x(5 - x)}$$



Pour $x = o$, on a $y = \pm \infty$; l'axe $o\,y$ est une asymptote.

Pour $x = 5 = o$ B, $y = \pm \infty$; la parallèle B z est une seconde asymptote.

On peut écrire

$$y = \frac{x^2\left(5 - \frac{18}{x} + \frac{45}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{25}{x} - 5\right)} = \frac{5 - \frac{18}{x} + \frac{45}{x^2}}{\frac{25}{x} - 5}$$

Pour $x = \pm \infty$, $y = -1 = -$ O R : la droite R L parallèle à $o\,x$, est la troisième asymptote.

Pour $x = \frac{15}{7} =$ O E, on a le minimum E F $= \frac{24}{25}$.

Pour $x = -15 = -$ O G,

on a le maximum $-$ G H $= -\frac{24}{25}$.

Ce maximum indique que la courbe traverse l'asymptote R L.

Posons $y = -1 = \frac{5x^2 - 18x + 45}{5x(5 - x)}$;

on en tire $x = -6{,}45 = -$ O N.

La branche de courbe située entre O y et B z représente la question particulière de géométrie proposée

dans l'énoncé, lorsque le point M reste entre O et B; le rapport figuré par l'ordonnée y, va de $+\infty$ au minimum E F, et de ce minimum à $+\infty$. Pour chaque valeur particulière de y, il y a deux valeurs différentes de x, telles que O D et O C.

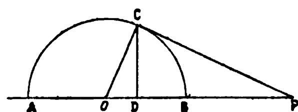
Remarquons que le numérateur de la fonction y ne peut être égalé à zéro, et qu'il est toujours positif. L'ordonnée y doit son signe à son dénominateur. Si l'on a

$$o < x < 5,$$

le dénominateur est positif, et il en est de même de y; on a la branche y E Z.

Si x est plus grand que 5, ce dénominateur est négatif; on a la branche L S.

Si x est négatif, le dénominateur est lui-même négatif, comme le montre la troisième branche de la courbe du troisième degré.



81. D'un point P pris sur le prolongement du diamètre A B d'une circonférence de rayon R, on mène une tangente P C à cette circonférence, et l'on fait tourner la figure autour de A B P. On demande à quelle distance du centre o il faut prendre le point P, pour que le rapport de l'aire latérale du cône à l'aire de la zône C B, soit égal à un nombre donné m. Le problème est-il toujours possible quelle que soit la valeur de m ?

(Enseignement secondaire des jeunes filles, Agrégation, 1885.)

On a l'égalité

$$\pi \cdot \text{C D} \times \text{C P} = m \cdot 2\pi \text{R} \times \text{D B}$$

Le double de la surface du triangle rectangle O C P est

$$x \times CD = R \times CP$$

On a $CP = \sqrt{x^2 - R^2}$, et par suite $CD = \dfrac{R\sqrt{x^2 - R^2}}{x}$

D'ailleurs $DB = R - OD = R - \dfrac{R^2}{x} = \dfrac{R(x-R)}{x}$

L'égalité primitive devient

$$\frac{(x^2 - R^2)}{x} = \frac{2mR(x-R)}{x}$$

ou bien

(1) $$\frac{x-R}{x}(x + R - 2mR) = o$$

On satisfera à l'équation en égalant à zéro chacun des facteurs :

(2) $$\frac{x-R}{x} = o$$

(3) $$x + R - 2mR = o$$

Or on cherche la valeur de x qui répond à chaque valeur particulière de m ; x est une fonction de m ; donc l'équation (3) doit seule donner cette fonction, qui est

$$x = R(2m - 1).$$

L'équation (3), ou la formule qu'on en tire, donne les valeurs de x qui correspondent à toutes les valeurs possibles de m ; donc la solution particulière $x = R$, tirée de l'équation (2), doit se trouver, si elle est bonne, parmi les valeurs de x comprises dans l'équation (3), ou plutôt dans sa formule de résolution. En effet, pour $m = 1$, on a $x = R$. On peut donc supprimer le facteur $\dfrac{x-R}{x}$ qui est indépendant de m (n° 79).

On a généralement $x > R$
ou bien

$$R(2m - 1) > R$$

d'où

$$m > 1$$

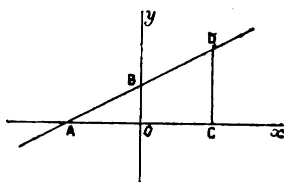
On peut donner à m toutes les valeurs plus grandes que l'unité. Si x tend vers le rayon, le rapport des deux surfaces décroissantes tend vers l'unité.

Remplaçons m par y; on a

$$y = \frac{1}{2R}x + \frac{1}{2}$$

c'est l'équation d'une droite facile à construire. Elle figure la variation du rapport lorsque x varie entre R et ∞.

Prenons le rayon pour unité. L'équation est alors



$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

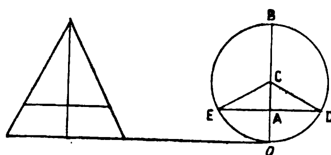
Pour $x = o,\ y = \frac{1}{2} = o\text{B}$

Pour $y = o,\ x = -1 = -o\text{A}$

Pour $x = 1 = \text{OC},\ y = 1 = \text{CD}$

Pour $x = +\infty,\ y = +\infty$

C'est à partir de C D que les ordonnées de la droite représentent le rapport considéré.



82. Une sphère de rayon R, et un cône droit dont le rayon de base est R, et la hauteur 2 R, sont posés sur un plan P. On coupe

les deux solides par un plan Q parallèle au plan P, situé à une distance x du plan P.

1° Déterminer x de façon que les sections faites par le plan Q aient la même surface.

2° Déterminer x de façon que le volume du tronc de cône soit égal à n fois le volume du segment sphérique compris entre les mêmes plans. Pour quelles valeurs de n le problème est-il possible ?

(Enseignement secondaire des jeunes filles, certificat d'aptitude 1885).

1re partie.

Les sections du cône sont proportionnelles aux carrés de leurs distances au sommet. Si S est la section à la hauteur x, ou à la distance du sommet marqué par $2\,R - x$, on aura la proportion

$$\frac{S}{\pi R^2} = \frac{(2\,R - x)^2}{(2\,R)^2}, \text{ d'où } S = \frac{\pi\,(2\,R - x)^2}{4}$$

La section de la sphère est égale à $\pi\,A\,D^2$. Or A D est la moyenne proportionnelle entre A B et A O ; la section sera $\pi\,x\,(2\,R - x)$.

On aura donc l'équation

$$(2\,R - x)^2 = 4\,x\,(2\,R - x)$$

ou bien

$$(2\,R - x)\,(2\,R - 5\,x) = o.$$

On aura deux solutions, $x' = 2\,R$, $x'' = \frac{2\,R}{5} = o,\ 4\,R.$

La solution $x' = 2\,R$ ne convient pas. En effet, le rapport des deux sections est $\frac{\pi\,(2\,R - x)^2}{4\,\pi\,x\,(2\,R - x)} = \frac{2\,R - x}{4\,x}$

Si l'on fait $x = 2\,R$, ce rapport est égal à zéro ; les deux sections ne sont donc pas égales (n° 79).

Si l'on désigne par y le rapport de la section du cône à celle de la sphère dont le rayon peut être pris pour unité, on a l'équation

$$y = \frac{2 - x}{4x}$$

qui représente une hyperbole (n° 14). Ses asymptotes sont l'axe des y, et une parallèle à l'axe des x ayant pour équation $z = -\frac{1}{4}$. La courbe coupe l'axe des abscisses au point déterminé par $x = 2$. Lorsque x varie entre o et 2, le rapport varie entre $+\infty$ et o. Pour $x = \frac{2}{5}, y = 1$.

2e partie.

Si l'on désigne par r le rayon de la petite base du tronc de cône, son volume sera

$$V = \pi (R^2 + Rr + r^2)\frac{x}{3}.$$

Les triangles semblables donnent

$$\frac{r}{R} = \frac{2R - x}{2R}; \text{ d'où } r = \frac{2R - x}{2};$$

par substitution, le volume devient

$$V = \frac{\pi x}{3}\left(\frac{x^2 - 6Rx + 12R^2}{4}\right)$$

On peut considérer le segment comme l'excès du secteur C E O D sur le petit cône C E D.

Le secteur est égal à la calote sphérique multipliée par le tiers du rayon ; on aura donc

$$\text{Secteur} = 2\pi Rx \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}\pi R^2 x$$

$$\text{Cône} = \pi\, A\, D^2\, \frac{R-x}{3} = \pi\, x\,(2R-x)\left(\frac{R-x}{3}\right)$$

Le volume du segment est

$$V' = \frac{2\pi}{3} R^2 x - \frac{\pi x}{3}(x^2 - 3Rx + 2R^2) = \frac{\pi x^2}{3}(3R - x)$$

on arrive plus rapidement à ce résultat, si l'on sait que le segment est égal à la moitié d'un cylindre dont la base a pour rayon A D, dont la hauteur est x, plus une sphère ayant cette hauteur pour diamètre.

Par hypothèse, $V = n\, V'$; on a donc l'équation du 3e degré

$$\frac{\pi x}{3}\left(\frac{x^2 - 6Rx + 12R^2}{4}\right) = \frac{n\pi x^2}{3}(3R - x)$$

ou bien

$$\frac{\pi x}{3}\left(n x^2 - 3nRx + \frac{x^2 - 6Rx + 12R^2}{4}\right) = o$$

On peut, sans perdre aucune solution, négliger le facteur $\frac{\pi x}{3}$ qui est indépendant de n. La véritable équation est comprise dans la parenthèse égalée à zéro (79); elle devient :

$$(4n + 1)\, x^2 - 6R\,(2n + 1)\, x + 12R^2 = o.$$

La formule générale est

$$x = \frac{3R\,(2n+1)}{4n+1} \pm \frac{R\sqrt{36n^2 - 12n - 3}}{4n+1}$$

En égalant à zéro la quantité placée sous le radical, on trouve

$$n' = -\frac{1}{6}$$

$$n'' = \frac{1}{2}$$

Pour que le radical soit réel, on doit prendre pour n des valeurs en dehors des racines.

On aura donc

$$n < -\frac{1}{6}$$

$$n > \frac{1}{2}$$

Le maximum, $-\frac{1}{6}$ aura lieu pour $x = 6$ R.

Le minimum, $\frac{1}{2}$ aura lieu pour $x = 2$ R.

Le calcul donne pour chaque valeur de n deux valeurs de x. Or, on a $x < 2$ R. Remplaçons x par 2 R dans le trinome

$$(4n + 1)x^2 - 6R(2n + 1)x + 12R^2.$$

La substitution donne

$$4(1 - 2n)R^2.$$

Or si n est $> \frac{1}{2}$, $2n$ est > 1 ; le trinome est négatif, ou de signe contraire à celui de son premier terme ; on a donc

$$x' < 2R < x''$$

Comme il faut $x < 2$ R, on fera $x = x'$, il faut donc rejeter le signe $+$. Ainsi dans la question particulière, il n'y aura qu'une solution pour chaque valeur de n comprise entre $\frac{1}{2}$ et $+\infty$. Alors x varie entre 2 R et zéro.

On peut écrire :

$$x = \frac{3\,R\left(2+\frac{1}{n}\right) - R\sqrt{36 - \frac{12}{n} - \frac{3}{n^2}}}{4+\frac{1}{n}}$$

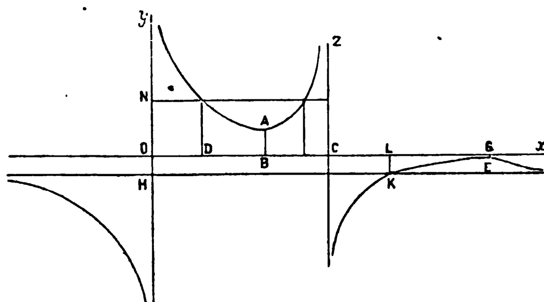
Si l'on fait $n = \infty$, on a bien

$$x = \frac{6\,R - 6\,R}{4} = o.$$

On retrouve la solution indiquée par le facteur commun x (79).

Remplaçons n par y ; prenons le rayon pour unité, et construisons la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{x^2 - 6\,x + 12}{4\,x\,(3 - x)}$$



Pour $x = o$, $y = \pm \infty$; l'axe $o\,y$ est une asymptote.

Pour $x = 3 = o\,c$, $y = \pm \infty$; la droite $c\,z$ est une autre asymptote. On peut écrire

$$y = \frac{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{12}{x} - 4\right)} = \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{12}{x^2}}{\frac{12}{x} - 4}$$

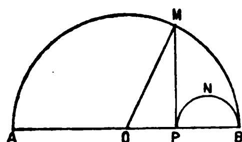
Pour $x = \pm \infty$, $y = -\frac{1}{4} = -$ O H. La droite H K est la 3ᵉ asymptote.

Pour $x = 2 =$ O B, on a le minimum B A $= \frac{1}{2}$

Pour $x = 6 =$ O G, on a le maximum G E $= -\frac{1}{6}$

Ce maximum indique que la courbe traverse son asymptote. Posons $y = -\frac{1}{4}$ on trouve $x = 4 =$ O L ; ce qui donne le point K.

La question particulière de géométrie est figurée entre les parallèles O y et A B. On voit que pour chaque valeur O N de y, il y a deux valeurs de x ; celle de gauche, plus petite que le diamètre figuré par O B, convient seule au problème proposé. Par exemple, pour $n = 1 =$ O N, $x = \frac{9 - \sqrt{21}}{5} = 0{,}88 =$ O D.



83. On fait tourner un demi-cercle autour de son diamètre A B, en même temps que le triangle rectancle O P M, et le demi-cercle P N B. On veut que le rapport du cône à la petite sphère soit égal à un nombre donné m. Trouver la distance du point P au centre O de la grande sphère.

On a l'équation

$$\pi (R + x)(R - x)\frac{x}{3} = \frac{m \pi (R - x)^3}{6}$$

ou bien

$$\frac{\pi (R - x)}{3}\left[R x + x^2 - \frac{m (R - x)^2}{2}\right] = o.$$

L'expression de x, fonction de m, ne peut être donnée que par l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la quantité entre parenthèse (n° 79) ; on a

(1) $$(2-m)\,x^2 + 2\,R\,(m+1)\,x - m\,R^2 = 0$$

d'où $x = \dfrac{-R\,(m+1)}{2-m} \pm \dfrac{R\,\sqrt{4\,m+1}}{2-m}$

Il s'agit de choisir entre les deux valeurs de x.

$$x' = \frac{-R\,(m+1) - R\,\sqrt{4\,m+1}}{2-m}$$

$$x'' = \frac{-R\,(m+1) + R\,\sqrt{4\,m+1}}{2-m}$$

1° Soit $m < 2$.

La racine x' a une valeur négative ; on doit faire $x = x''$.

Par exemple,

pour $m = 1$, $x = R\,(\sqrt{5} - 2) = 0,2361 \times R$.

2° Soit $m > 2$.

Le terme $(2-m)\,x^2$ est négatif. On a la condition $x < R$. Si l'on remplace x par R dans le trinome (1), on obtient un résultat positif $4\,R^2$. Le rayon R est donc compris entre les racines :

$$x' = \frac{R\,(m+1) + R\,\sqrt{4\,m+1}}{m-2}$$

$$x'' = \frac{R\,(m+1) - R\,\sqrt{4\,m+1}}{m-2}$$

Ici, x'' est la plus petite racine. On a

$$x'' < R < x'$$
$$x < R$$

On fera $x = x'' = \dfrac{-R(m+1) + R\sqrt{4m+1}}{2-m}$

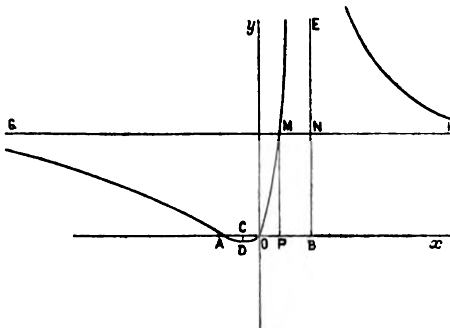
C'est la même formule que dans le premier cas.

Soit par exemple $m = 6$, on a $x = \dfrac{R}{2}$.

Construisons la courbe donnée par l'équation

$$y = \frac{2x(1+x)}{(1-x)^2}$$

le rayon étant pris pour unité.



Pour $x = o$, on a $y = o$; la courbe passe à l'origine.

Pour $x = -1 = -OA$ $y = o$.

Dans l'expression de x en fonction de m, pour que le radical soit réel, il faut poser $4m + 1 > o$, ou $m > -\frac{1}{4}$, ce qui donne $x = -\frac{1}{3} = -OC$; C D est le minimum.

Pour $x = 1 = OB$, $y = +\infty$; la droite B E est asymptote, vers la partie supérieure seulement, à deux branches de la courbe.

On peut écrire

$$y = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2\left(2 + \frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Pour $x = \pm \infty$, $y = 2$; la droite G H est une seconde asymptote pour chaque branche. Faisons $y = 2$; on a $x = \frac{1}{3} =$ O P ; la courbe traverse l'asymptote au point M. Le volume du cône est alors double de celui de la petite sphère. Les ordonnées de l'arc O M E indiquent bien l'accroissement rapide du rapport du cône à la petite sphère, lorsque la distance x varie entre o et le rayon O B. Si l'on se reporte au choix d'une valeur de x pour la question particulière de géométrie, la courbe montre bien, lorsqu'on la coupe par des parallèles à G H, que pour $m < 2$, il faut prendre la plus grande racine, et que pour $m > 2$, il faut prendre la plus petite.

84. Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est 2 p, sachant que la surface totale du cône engendré par le triangle tournant autour d'un côté de l'angle droit, est égale à la surface du cercle ayant pour rayon l'hypoténuse.

(Enseignement secondaires de jeunes filles, agrégation, 1886).

Soient x, y, z les côtés demandés ; on aura

$$(1) \qquad x + y + z = 2p$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = z^2.$$

Si le triangle tourne autour du côté y qui est alors la hauteur du cône, la surface de la base est πx^2, la surface latérale $\pi x z$; la troisième équation sera, en supprimant le facteur commun π,

$$(3) \qquad x + xz = z^2.$$

La seconde et la troisième équation donnent

$$xz = y^2$$

$$z = \frac{y^2}{x}$$

En mettant cette valeur dans ([2]), on a

$$x^2 + y^2 = \frac{y^4}{x^2}$$

ou bien

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^4}{x^4}$$

Posons $\frac{y}{x} = t$, t étant un nombre positif.

L'équation précédente donne

$$1 + t^2 = t^4$$

ou

$$t^4 - t^2 - 1 = o$$

On en tire

$$t^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Au moyen de l'équation ([1]), on obtient

$$x + tx + t^2 x = 2p$$

d'où

$$x = \frac{2p}{1 + t^2 + t}$$

On a enfin

$$x = \frac{2p}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} = \frac{2p}{D}$$

$$y = \frac{2p\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{D}$$

$$z = \frac{2p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{D}$$

Il est facile de vérifier ces résultats en les introduisant dans les équations.

On demandait ensuite de calculer z, dans l'hypothèse de $p = 1$, à moins d'un centième près.

On a d'abord

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180$$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1{,}2720$$

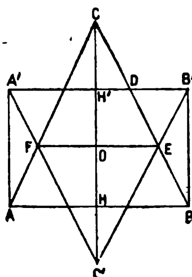
$$D = 3{,}890$$

On trouve

$$z = \frac{2 \times 1{,}618}{3{,}89} = 0{,}8318$$

$$x = \frac{2}{3{,}89} = 0{,}514$$

$$y = \frac{2 \times 1{,}272}{3{,}89} = 0{,}654$$



85. Deux triangles isoscèles égaux ont leurs hauteurs sur une même ligne droite ; on donne la surface S de chacun d'eux, et le rapport $\frac{CH'}{CH} = m$.

Trouver la surface commune aux deux triangles en fonction de S et de m. En-

tre quelles limites varie cette surface lorsque m varie entre zéro et l'unité.

(**Enseignement secondaire des jeunes filles, certificat d'aptitude, 1887**).

On a d'abord $S = \frac{b\,h}{2}$, b étant A B, et h étant C H.

Les rectangles A A' H' H et B B' H' H sont égaux. Les triangles A A' F et B B' E sont isoscèles, et égaux. Donc la figure C F C' E est un losange, dont les diagonales se coupent en parties égales et à angle droit. Les quatre petits trapèzes sont donc égaux ; par suite on a pour la surface commune

$$y = 2\,(O\,E + H'\,D).\;O\,H'.$$

On a
$$C\,O = \frac{C\,C'}{2} = \frac{h\,(m+1)}{2}$$

$$\text{d'où } O\,H' = \frac{h\,(m+1)}{2} - m\,h = \frac{h\,(1-m)}{2}.$$

Les triangles semblables donnent

$$\frac{O\,E}{H\,B} = \frac{C\,O}{C\,H} = \frac{m+1}{2},$$

$$\text{d'où } O\,E = \frac{b\,(m+1)}{4}$$

$$\frac{H'\,D}{H\,B} = \frac{C\,H'}{C\,H} = m$$

$$\text{d'où } H'\,D = \frac{b\,m}{2}.$$

On a donc

$$y = \frac{b\,h}{4}(1-m)\,(1+3\,m) = \frac{S}{2}\,(1-m)\,(1+3\,m)$$

ou bien $y = \frac{S}{2}(1 + 2\,m - 3\,m^2)$.

Pour $m = o$, $y = \frac{S}{2}$

pour $m = 1$, $y = o$.

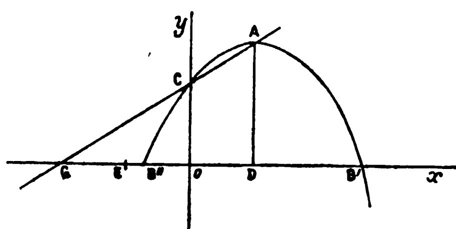
Lorsque m varie depuis zéro jusqu'à l'unité, y ne décroît pas simplement depuis $\frac{S}{2}$ jusqu'à 0.

En effet, on a $y = \frac{S}{6}(3 - 3\,m)\,(1 + 3\,m)$.

Les facteurs variables ont une somme constante égale à 4. Leur produit sera maximum si l'on pose $3 - 3\,m = 1 + 3\,m$, d'où $m = \frac{1}{3}$; pour cette valeur du rapport, la surface commune maximum est les $\frac{2}{3}$ de la surface du triangle isoscèle. Ainsi, la surface commune, partant de $\frac{S}{2}$, augmente d'abord, atteint $\frac{2S}{3}$, puis diminue jusqu'à zéro. Il est bon de contrôler ces résultats en dessinant les triangles dans chaque cas particulier.

Posons $m = \frac{x}{h}$; et remplaçons S par $\frac{b}{2}$, en prenant la hauteur h pour unité dans la construction. Il vient :

$$y = \frac{b}{4}(1 - x)\,(1 + 3\,x).$$



Pour $x = o$,

$y = \frac{b}{4} = \text{OC} = \frac{S}{2}$

Pour

$y = \frac{b}{4}$, $x = \frac{2}{3}$

Pour $x = 1 = OB'$, $y = o$.

Pour $x = -\frac{1}{3} = -OB''$, $y = o$.

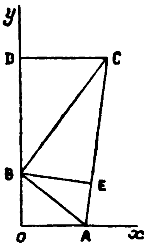
On peut écrire

$$y = \frac{b}{12}(3 - 3x)(1 + 3x).$$

Les facteurs variables ont une somme constante ; pour que leur produit soit maximum, posons

$$3 - 3x = 1 + 3x,$$

d'où $x = \frac{1}{3} = OD$, et $y_1 = \frac{b}{3} = DA = \frac{b}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}S$. Ainsi, lorsque x varie entre 0 et h, ou lorsque m varie entre 0 et 1, la surface commune varie entre $\frac{S}{2}$ et 0 ; elle passe par sa valeur maximum $\frac{2S}{3}$, pour $x = \frac{h}{3}$ ou pour $m = \frac{1}{3}$; elle redevient égale à $\frac{S}{2}$ pour $x = \frac{2h}{3}$ ou pour $m = \frac{2}{3}$. Les ordonnées de l'arc de parabole C A B' représentent la variation de la surface commune entre les limites fixées par l'énoncé du problème.



86. On donne deux droites rectangulaires Ox et Oy. On prend $OA = a$; et l'on considère un triangle rectangle A B C dont le sommet de l'angle droit est en B sur Oy. Calculer B A et B C, sachant :

1° Que l'aire du triangle est équivalente à l'aire du carré construit sur O A ;

2° Que le volume engendré par ce triangle tournant

autour de O y est dans un rapport donné m avec celui d'une sphère de rayon O A.

On déterminera entre quelles limites m doit être compris, et on vérifiera les valeurs de B A et de B C qui correspondent aux valeurs extrêmes de m.

(Enseignement secondaire des jeunes filles, agrégation, 1887.)

Soient x, y, z les trois côtés A B, B C et A C, et h la hauteur du triangle rectangle. On a pour le double de sa surface $xy = zh = 2a^2$.

Le volume engendré est

$$V = \text{surf. AC} \times \frac{h}{3}$$

La surface A C est celle d'un tronc de cône.

$$\text{Surf. AC} = \pi(a + DC)z = \pi(a + DC)\frac{2a^2}{h},$$

et par suite

$$V = \pi(a + DC)\frac{2a^2}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3 m$$

d'où $\qquad DC = a(2m - 1).$

Les triangles semblables B D C et A O B donnent

$$\frac{DC}{OB} = \frac{y}{x}.$$

On a $\quad OB = \sqrt{x^2 - a^2}$, et par suite

$$DC = \frac{y\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{2a^2\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$

On a donc

$$DC = a(2m - 1) = \frac{2a^2\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$

Cette valeur de D C est positive, car le triangle n'est

pas traversé par l'axe de rotation. Le radical est donc affecté du signe $+$; on a la restriction

$$m > \frac{1}{2}$$

L'équation à résoudre est

$$2m - 1 = \frac{2a\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$

En élevant les deux membres au carré, ce qui suppose le double signe, on a une équation plus générale

$$(2m - 1)^2 x^4 - 4a^2 x^2 + 4a^4 = o.$$

On en déduit

$$x^2 = \frac{a^2(2 \pm 4\sqrt{m - m^2})}{(2m - 1)^2}$$

Pour que x^2 soit réel, on doit avoir

$$m - m^2 > o$$

m doit être compris entre les racines de l'équation $m^2 - m = o$; on aura donc

$$o < m < 1.$$

Le minimum o donne $x^2 = 2a^2$, d'où $x = \pm a\sqrt{2}$.
Le maximum 1 donne encore $x = \pm a\sqrt{2}$.
Dans la question particulière on aura

$$\frac{1}{2} < m < 1.$$

$$x = \frac{a\sqrt{2 \pm 4\sqrt{m - m^2}}}{2m - 1}$$

$$y = \frac{2a^2(2m - 1)}{a\sqrt{2 \pm 4\sqrt{m - m^2}}} = a\sqrt{2 \mp 4\sqrt{m - m^2}}$$

On obtient la seconde forme en multipliant les deux termes de l'expression fractionnaire de y par

$$\sqrt{2 \mp 4.\sqrt{m - m^2}}.$$

Pour que x et y aient deux valeurs réelles on doit avoir

$$2 - 4\sqrt{m - m^2} > o$$

Ou

$$m^2 - m + \frac{1}{4} > o$$

Le premier membre étant un carré parfait est plus grand que zéro.

x et y ont donc deux valeurs positives réelles pour toute valeur de m comprise d'ailleurs entre 0 et 1.

Calculons les valeurs de x et de y qui correspondent aux deux limites du rapport.

1° Soit $\quad m = \frac{1}{2}$

$$y = a\sqrt{2 \mp 2}\ ;\ y' = o,\ y'' = 2a.$$

Alors

$$x' = \frac{2\,a^2}{y'} = \frac{2\,a^2}{o} = \infty\ ,\ \text{et}\ x'' = \frac{2\,a^2}{2\,a} = a$$

Dans ce cas, le volume engendré est un cône ; on a $v = \pi a^2 \times \frac{2\,a}{3} = \frac{2}{3}\pi\,a^3$; c'est la moitié du volume de la sphère.

2° Soit $m = 1$

$$y = a\sqrt{2} = x$$

Le triangle rectangle est isoscèle ; sa base engendre

la surface cylindrique $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$; le volume est $4\pi a^2 \times \frac{a}{3} =$ volume sphérique.

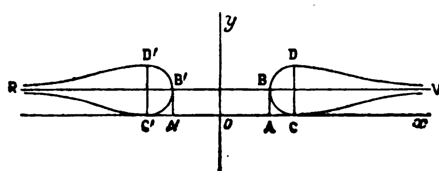
Revenons à l'équation

$$2m - 1 = \frac{2a\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}$$

Remplaçons m par y ; donnons au radical le double signe, et étudions la courbe exprimée par l'équation

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{a\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2}.$$

Nous prenons O A pour unité.



L'équation $y = \frac{1}{2}$ représente le diamètre R V de la courbe, passant par le milieu des cordes qui lui sont perpendiculaires. Cette droite, et l'axe oy, sont deux axes de symétrie.

Pour $x = \pm 1$, $y = \frac{1}{2}$, ce qui détermine les points B et B'. On ne peut donner à x aucune valeur absolue inférieure à O A ; la courbe n'a aucun point entre A B et A' B'.

Pour $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$; $y' = o$, $y'' = 1$, ce qui donne les points C et C' du minimum, et les points D et D' du maximum, à droite et à gauche de oy.

On peut trouver directement le maximum et le minimum. On peut écrire

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}.$$

En valeur absolue, cette expression aura son maximum en même temps que son carré $\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$; les deux facteurs de ce produit ont une somme constante ; posons

$$\frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

d'où $$x = \pm\sqrt{2}$$

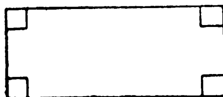
y sera alors maximum ou minimum suivant que le point sera au-dessus ou au-dessous du diamètre R V.

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = o\,; \quad y'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

La forme $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$

montre que pour $x = \pm\infty$, $y = \frac{1}{2}$. Le diamètre R V est asymptote.

Les ordonnées de l'arc B D V représentent le rapport du volume engendré à celui de la sphère lorsque x varie entre a et $+\infty$. Pour chaque valeur de m comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, il y a deux valeurs positives de x plus grandes que O A, et par suite deux triangles rectangles répondant à la question.



87. Avec un carton rectangulaire dont les côtés sont a et b, on veut faire une boîte, en enlevant à cha-

que coin un carré de côté x ; trouver x de manière à obtenir le volume maximum.

La base de ce volume sera $(a - 2x)(b - 2x)$ et la hauteur sera x ; le volume y sera

$$y = (a - 2x)(b - 2x)x.$$

Le maximum de y aura lieu en même temps que celui de $(a - 2x)(b - 2x) \times 4x$; les trois facteurs ont alors une somme constante ; mais on ne peut les rendre égaux si a diffère de b. On pourrait résoudre la question en employant des dénominateurs indéterminés. Mais la méthode de Fermat conduit facilement au but.

$$y = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3$$

Ecrivons

$$abx - 2(a+b)x^2 + 4x^3 = \begin{cases} ab(x+h) \\ -2(a+b)(x^2 + 2hx + h^2) \\ +4(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) \end{cases}$$

d'où

$$o = abh - 2(a+b)(2hx + h^2) + 4(3hx^2 + 3h^2x + h^3)$$

supprimons le facteur h ; nous aurons

$$ab - 2(a+b)(2x+h) + 4(3x^2 + 3hx + h^2) = o$$

Si l'on fait $h = o$, on obtient

$$12x^2 - 4(a+b)x + ab = o$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{a+b}{6} \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - ab}}{6}$$

Si b est inférieur à a, on doit avoir

$$x < \frac{b}{2} < \frac{a}{2}$$

substituons $\frac{b}{2}$ à la place de x dans le trinome [1]. On obtient $b\,(b - a)$.

Ce résultat étant négatif, a le signe contraire de celui de $12\,x^2$. On a donc

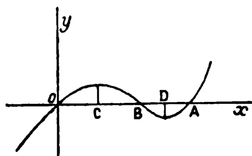
$$x' < \frac{b}{2} < x''$$

On doit avoir $x < \frac{b}{2}$; donc $x = x'$; il faut donc rejeter le signe + et prendre

$$x = \frac{a + b}{6} - \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - a\,b}}{6}$$

Construisons la courbe dont l'équation est

$$y = (a - 2\,x)\,(b - 2x)\,x = 4\,x^3 - 2\,(a + b)\,x^2 + a\,b\,x.$$



Pour $x = o$, $y = o$; la courbe passe à l'origine.

Pour $x = \frac{b}{2} = \text{O B}$, $y = o$

Pour $x = \frac{a}{2} = \text{O A}$, $y = o$

Pour x compris entre o et $\frac{b}{2}$, les trois facteurs de y sont positifs ; y est positif ; le maximum aura lieu pour $x' = \text{O C}$.

Pour x compris entre $\frac{b}{2}$ et $\frac{a}{2}$, le premier et le troisième facteurs sont positifs, mais le second est négatif ; y est donc négatif ; la fonction va de zéro à un minimum, qui a lieu pour $x'' = \text{O D}$, puis elle redevient nulle. Pour $x = +\infty$, $y = +\infty$. Pour $x = -\infty$, $y = -\infty$.

Supposons que b devienne égal à a, le point B se rapproche du point A, et à cette limite, la courbe est tangente à $o\,x$, au point A où le minimum est zéro. L'abscisse du maximum est alors $x' = \frac{a}{3} - \frac{a}{6} = \frac{a}{6}$ ·

On peut arriver directement à ce résultat. Le volume est alors

$$y = (a - 2\,x)^2\,x$$

il sera maximum en même temps que

$$(a - 2\,x)^2 \times 2\,x\,;$$

ce qui exige la proportion

$$\frac{a - 2\,x}{2} = \frac{2\,x}{1}$$

d'où $a - 2\,x = 4\,x$, et $x = \frac{a}{6}$ ·

88. On veut faire construire un chaudron cylindrique en feuilles de cuivre qui ait la plus grande capacité possible pour une surface donnée, d'épaisseur donnée, et par conséquent de poids et de prix déterminés.

Soient x le rayon du fond, h la hauteur du cylindre, et y le volume ; on aura

$$y = \pi\,x^2\,h.$$

Supposons que la surface de la base, plus la surface latérale, soient égales à celle d'un cercle de cuivre de même épaisseur et de rayon donné a. On aura

$$\pi\,x^2 + 2\,\pi\,x h = \pi\,a^2$$

ou

(1) $$x^2 + 2\,x\,h = a^2$$

Cette somme est constante.

On peut écrire

$$y = \frac{\pi}{2} \cdot x \times 2\,x\,h$$

$$y^2 = \frac{\pi^2}{4}\,(x^2)^1\,(2\,x\,h)^2$$

L'expression à rendre maximum est

$$(x^2)^1\,(2\,x\,h)^2$$

Or, d'après l'équation (1), la somme des premières puissances est constante ; on doit poser la proportion

$$\frac{x^2}{1} = \frac{2\,x\,h}{2}$$

ce qui donne $x = h$.

Le rayon de la base doit être égal à la profondeur du vase cylindrique.

L'équation (1) donne $3\,x^2 = a^2$

d'où $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

et $y = \pi\,\dfrac{a^3}{3\sqrt{3}}$.

La méthode de Fermat conduit aussi à ce résultat.

L'équation (1) donne $h = \dfrac{a^2 - x^2}{2\,x}$

le volume est

$$y = \frac{\pi}{2}\,x\,(a^2 - x^2)$$

On écrit

$$a^2\,x - x^3 = a^2\,(x + \alpha) - (x + \alpha)^3.$$

Ici α représente une quantité susceptible de décroître indéfiniment vers zéro.

On a successivement

$$o = a^2 \alpha - (3 \alpha x^2 + 3 \alpha^2 x + \alpha^3)$$
$$o = a^2 - (3 x^2 + 3 \alpha x + \alpha^2)$$

Puis, en faisant $\alpha = o$,

$$o = a^2 - 3 x^2$$

$$\text{d'où } x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{1{,}7320}$$

$$\text{Or } h = \frac{a^2}{2 x} - \frac{x}{2}$$

On aura donc

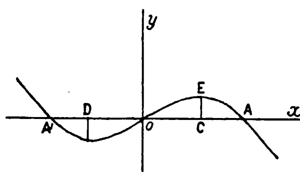
$$h = \frac{a^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{a} - \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$h = \frac{a}{2}\left(\frac{3-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Construisons la courbe dont l'équation est

$$y = \frac{\pi}{2} x (a^2 - x^2)$$

$$y = \frac{\pi}{2} x (a + x) (a - x).$$



Pour $x = o$, $y = o$; la courbe passe à l'origine. Pour $x = a = \text{O A}$, $y = o$. Pour $x = -a = -\text{OA}'$, $y = o$. Si la valeur de x est entre o, et a, les trois facteurs sont positifs, y est positif.

On a l'arc O E A, dont les ordonnées représentent les variations du volume.

Pour $x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \text{O C}$, on a le maximum $\text{C E} = \pi \frac{a^3}{3\sqrt{3}}$.

Si la valeur de x est entre o, et $-a$, le second et le troisième facteur sont positifs, mais le facteur x est négatif, ce qui rend y négatif. Pour $x = -\frac{a}{\sqrt{3}} = -$ O D, on a le minimum. Pour $x = +\infty$, $y = -\infty$

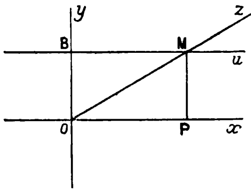
Pour $x = -\infty$, $y = +\infty$.

CHAPITRE X.

DISCUSSION DES FORMULES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER ET DU SECOND DEGRÉ.

89. On considère deux lieux géométriques tels, que la recherche de leur point d'intersection conduit à la résolution de l'équation proposée. Lorsque l'on fait varier un coefficient, l'un des lieux géométriques se déplace, ainsi que le point commun ; et en donnant au coefficient certaine valeur limite, on voit ce que devient l'abscisse du point d'intersection qui est une racine de l'équation.

Prenons d'abord l'équation du premier degré à une inconnue $ax = b$, dont la formule est $x = \frac{b}{a}$.



Les équations $y = ax$, et $y = b$ représentent les droites Oz et Bu. Si on admet que x_1 et y_1 sont les coordonnées de leur point commun M, on a l'équation

$$b = a\,x_1.$$

Elle donne pour l'abscisse du point commun

$$\text{O P} = x_1 = \frac{b}{a}$$

Si a devient très petit, le rapport $\frac{b}{a}$ devient très

grand, ainsi que O P ; pour $a = o$, la droite oz se confond avec l'axe ox, est parallèle à la seconde droite Bu et ne peut plus la rencontrer ; cette impossibilité est indiquée par le symbole $x_1 = \frac{b}{o} = \infty$.

Si on a en même temps $b = o$, la droite B u se confond elle-même avec ox ; les deux droites n'en font qu'une ; elles se rencontrent en tous leurs points ; l'abscisse du point commun est donc indéterminée ; $x_1 = \frac{o}{o}$.

Si le coefficient a était négatif, la discussion serait aussi facile.

On peut interpréter la discussion algébrique au moyen de deux autres lieux géométriques. Considérons l'hyperbole qui a pour équation $xy = b$, et la droite qui a pour équation $y = a$. On aura leur point commun en résolvant l'équation $ax_1 = b$, ce qui donne $x_1 = \frac{b}{a}$

Si l'on suppose que a diminue vers zéro, la droite parallèle à l'axe ox s'en rapproche peu à peu ; le point commun s'éloigne ; et si l'on fait $a = o$, on a $x_1 = + \infty$; il n'y a plus de point commun, parce que la droite considérée se confond avec l'asymptote ox, et ne peut plus se rencontrer avec la courbe ; la racine x_1 n'existe plus ; cette impossibilité est indiquée par le symbole $x_1 = + \infty$.

Supposons qu'on ait en même temps $a = o$, et $b = o$. Si l'on a $b = o$, l'équation $xy = o$ représente les axes. En effet : il faut que l'un des deux facteurs soit nul ; pour $x = o$, y peut recevoir des valeurs quelconques,

ce qui donne tous les points de l'axe oy ; et pour $y = o$, x peut à son tour recevoir une infinité de valeurs finies, ce qui donne tous les points de l'axe illimité ox. Si donc on pose $a = o$, c'est-à-dire $y = o$, l'un des lieux géométriques fait partie de l'autre qui est composé des deux axes ; ils ont une infinité de points communs sur ox, l'abscisse x_1 reçoit une infinité de valeurs, et est indéterminée.

90. Le système des deux équations

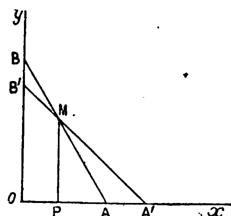
$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

est résolu (94) par les formules

$$x_1 = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \quad y_1 = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

Chaque équation a par elle-même une signification qu'il ne faut pas perdre de vue tout en songeant au système. Les deux lieux géométriques dont on doit chercher l'intersection sont donnés par les équations elles-mêmes.

1° Tant que le dénominateur commun $ab' - ba'$ n'est pas nul, il n'y a pas de difffculté ; x_1 et y_1 ont des valeurs finies, positives ou négatives.



Chacune des équations représente une ligne droite.

Dans la première, pour

$$y = o, x = \frac{c}{a} = oA$$

et pour $x = o, y = \frac{c}{b} = oB$

La droite est A B.

On trouvera de même la position de la seconde droite A′ B′ qui coupe la première au point M.

La figure particulière suppose que l'on a

$$\frac{c}{a} < \frac{c'}{a'}, \qquad \frac{c}{b} > \frac{c'}{b'}$$

ou bien

$$\frac{b}{b'} < \frac{c}{c'} < \frac{a}{a'}$$

et par suite

$$a\,c' - c\,a' > o$$
$$c\,b' - b\,c' > o$$
$$a\,b' - b\,a' > o$$

Il en résulte que x_1 et y_1 ont des valeurs positives O P et M P.

2° Supposons qu'on ait la proportion $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$; il suffit pour cela de faire varier l'un des coefficients, b' par exemple.

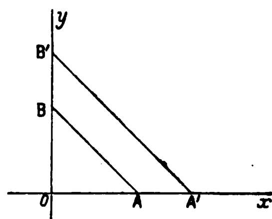
Chaque équation ne renferme en réalité que deux coefficients qui sont deux rapports. Si b et b' ne sont pas nuls, on peut mettre les équations sous la forme

$$y + \frac{a}{b}x = \frac{c}{b}, \quad y + \frac{a'}{b'}x = \frac{c'}{b'}$$

Par hypothèse, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; le premier membre de chaque équation est le même ; comme on ne suppose pas la proportion $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ les équations sont incompatibles. Les formules donnent alors les symboles

$$x_1 = \frac{c\,b' - b\,c'}{o} = \infty, \; y_1 = \frac{a\,c' - c\,a'}{o} = \infty.$$

Aucun groupe de valeurs finies de x et de y ne peut satisfaire aux deux équations.



Les équatlons

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

$$y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}$$

représentent deux droites parallèles puisque les coefficients angulaires de x sont égaux ; de plus ces droites passent par des points différents B et B′ puisque $\frac{c}{b}$ et $\frac{c'}{b'}$ sont inégaux ; il n'y a aucun point de rencontre ; cette impossibilité est exprimée par les symboles $x_1 = \infty$, $y_1 = \infty$. On dit que les droites se rencontrent à l'infini.

3° Supposons qu'on ait à la fois les deux proportions

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

ou bien $$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ et } \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

Les deux équations ne sont plus incompatibles ; et même elles sont identiques ; on a une seule équation à deux inconnues ; le problème est indéterminé ;

$x_1 = \frac{0}{0}$, $y_1 = \frac{0}{0}$ · x_1 et y_1 admettent une infinité de solutions. L'indétermination est relative, car y_1 est une fonction de x_1, ce que les formules n'indiquent pas. Les parallèles représentées par les deux équations passent par un même point B, puisque $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$; elles

se confondent en tous leurs points dont le nombre est infini. A chaque point correspondent des valeurs de x_1 et de y_1 qui ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, car elles doivent satisfaire à l'équation de la droite unique $y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{b}$.

Reprenons l'hypothèse $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. On peut arriver autrement à la condition de compatibilité. Si l'on suppose pour x et y des valeurs finies, on peut écrire :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{a\,x}{a'\,x} = \frac{b\,y}{b'\,y} = \frac{a\,x + b\,y}{a'\,x + b'\,y} = \frac{c}{c'}$$

d'où l'on conclut

$$a\,c' - c\,a' = o$$
$$b\,c' - c\,b' = o.$$

Ainsi, lorsque le dénominateur commun est nul, pour que les équations soint compatibles, il faut que les numérateurs soient nuls eux-mêmes ; x_1 et y_1 sont alors indéterminés. Mais si le rapport $\frac{c}{c'}$ n'est pas égal aux deux autres, x_1 et y_1 sont infinis, et d'ailleurs les équations sont incompatibles.

4° Supposons que les coefficients d'une inconnue soient nuls, et que l'on ait seulement

$$b = o, \quad b' = o.$$

Les équations sont

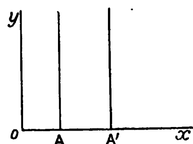
$$a x + o \times y = c$$
$$a' x + o \times y = c'.$$

Le produit $o \times y$ est nul pour toute valeur finie de y,

qui dans chaque équation est indéterminé d'une manière absolue ; mais x a deux valeurs finies et différentes $\frac{c}{a}$ et $\frac{c'}{a'}$; car on ne suppose pas la proportion $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$; ces deux équations à une seule inconnue sont donc incompatibles.

Le symbole $x_1 = \frac{o}{o}$ n'a aucun sens ; car x_1, loin d'avoir une infinité de valeurs, n'en admet aucune.

On a d'ailleurs $y_1 = \frac{a\,c' - c\,a'}{o} = \infty$.



Si l'on suppose que b et b', tendent vers zéro, les points B et B' des deux droites s'éloignent indéfiniment de l'origine O ; la rencontre sera à une grande distance de l'axe $x\,x'$, du côté des y positifs, ou bien du côté des y négatifs, selon les signes donnés aux coefficients b et b'.

Lorsque l'on pose $b = o$, et $b' = o$, les points B et B' sont à l'infini vers le haut et vers le bas de la figure ; ils n'existent plus ; les deux droites qui passent toujours par les points A et A' indépendants de b et b', étant devenues parallèles à O y, sont parallèles entre elles ; elles n'ont aucun point commun : on dit qu'elles se rencontrent à l'infini. La formule donne $y_1 = \pm\infty$. Dans chaque équation, y est indéterminé ; mais y_1 est infini dans le système, et l'on a pour x_1 deux valeurs contradictoires.

5° Si l'on suppose à la fois $b = o$, $b' = o$, et $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$,

les deux équations n'en font qu'une ; y_1 est indéterminé, et $x_1 = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$.

Les formules donnent $x_1 = \frac{o}{o}$; $y_1 = \frac{o}{o}$. Comme les points A et A′ se confondent, les deux parallèles à $o\,y$ n'en font qu'une ; leur rencontre a lieu pour

$$x_1 = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$$

et pour une valeur quelconque de y_1.

Mais la formule $x_1 = \frac{o}{o}$ n'a pas de sens.

On a proposé divers artifices pour faire disparaître l'indétermination. Malheureusement, on peut souvent trouver un cas où l'artifice donne une indication fausse; l'emploi de ces artifices parait donc illusoire. La lumière ne peut venir que des équations elles-mêmes, et des considérations géométriques.

Supposons par exemple que l'on ait comme au 4e cas, les seules hypothèses $b = o$, $b' = o$.

Prenons avec quelques auteurs

$$b = h, \quad b' = p\,h$$

p étant un rapport indéterminé, et h une quantité que l'on fera ensuite égale à zéro.

En substituant dans la formule générale, on a

$$x_1 = \frac{c\,p\,h - h\,c'}{a\,p\,h - h\,a'} = \frac{c\,p - c'}{ap - a'}$$

Remarquons d'abord que le rapport p reste seul dans la formule et qu'on ne pourra plus y introduire l'hypothèse $b = o \quad b' = o$.

La formule contenant l'indéterminée p ne donnera pas pour x_1 une valeur déterminée, dit-on ; mais la valeur de x_1 sera-t-elle indéterminée ou arbitraire ? Cette conclusion serait fausse, car x_1 devant être égal d'une part à $\frac{c}{a}$, et d'autre part à $\frac{c'}{a'}$, rapports qui sont ici différents, la valeur de x_1, commune aux équations, loin d'être indéterminée ou quelconque, est impossible. L'emploi du rapport indéterminé p n'est donc pas légitime. La lumière ne peut venir que des équations et de la géométrie.

91. Nous allons examiner le cas particulier où dans l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = o$, on fait $a = o$.

Les racines de cette équation peuvent être mises sous la forme

$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Soient $y = -\frac{c}{x}$ l'équation d'une hyperbole, et $y = ax + b$ celle d'une sécante à cette courbe. Supposons que x et y soient les coordonnées d'un point commun, on aura

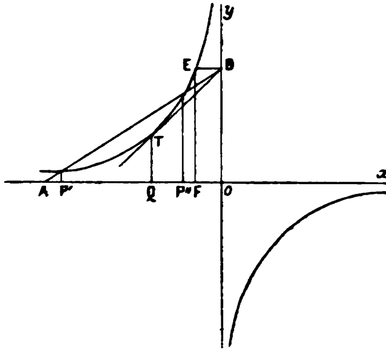
$$ax + b = -\frac{c}{x}$$

ou bien

$$ax^2 + bx + c = o$$

Les deux solutions x' et x'' de cette équation du second degré sont les abscisses des deux points d'intersection

de la section conique et de la droite. Supposons que les signes des trois coefficients a, b, et c soient en évidence.



L'équation $y = \frac{-c}{x}$ montre que pour des valeurs positives de x, y aura des valeurs négatives ce qui donne la branche comprise dans l'angle xoy' ; de plus, pour des valeurs négatives de x, y aura des valeurs positives, ce qui donne la branche comprise dans l'angle $y\,o\,x'$.

Quant à la droite, pour $x = o$, $y = b = \text{O B}$; et pour $y = o$, $x = -\frac{b}{a} = -\text{O A}$.

La droite A B rencontre la courbe en deux points dont les abscisses sont les racines $x' = -\text{O P}'$, et $x'' = -\text{O P}''$. Elles sont négatives comme le montrent les formules et même l'équation.

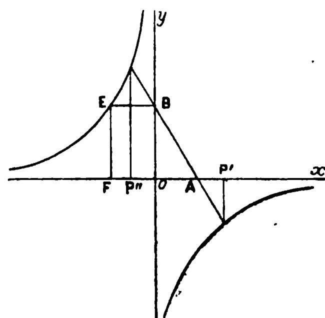
On peut trouver les points d'intersection au moyen de la règle et du compas sans construire exactement l'hyperbole, comme on l'a vu au n° 47. On portera sur l'axe $o\,x'$ les valeurs trouvées pour ces racines ; si l'on élève des perpendiculaires en P' et en P'' sur l'axe des abscisses, elles rencontreront la droite A B en deux points qui seront sur l'hyperbole.

Supposons que a décroisse, et tende vers zéro ; comme $\text{O A} = \frac{b}{a}$, le point A s'éloigne vers la gauche, la

droite B A tourne autour du point B ; O P″ diminue tandis que O P′ augmente ; pour $a = o$, la droite est parallèle à l'axe des x

$$x'' = - \mathrm{OF} = - \frac{c}{b}, \; x' = - \frac{2c}{o} = - \infty.$$

Lorsque $a = o$, l'équation de la droite est $y = b$; en la substituant dans celle de l'hyperbole, on a $x = -\frac{c}{b}$; il n'y a plus qu'une solution, ou une seule racine.



Supposons maintenant que a soit négatif. La droite a pour équation $y = -ax + b$; pour $x = o$, $y = b = \mathrm{O\,B}$ pour $y = o$, $x = \frac{b}{a} = \mathrm{O\,A}$.

La sécante rencontre les deux branches de l'hyperbole. En mettant le nouveau signe en évidence, on a

$$x' = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}$$

La racine x' est positive ; la racine x'' est encore négative. Si la valeur absolue de a diminue, O A augmente, le point A s'éloigne vers $+\infty$; pour $a = o$, la sécante devient parallèle à l'axe O X ; le point P″ est en F, le point P′ est à l'infini. La sécante rencontre la branche de gauche au point dont l'abscisse est $-\mathrm{O\,F} = -\frac{c}{b}$ mais elle ne rencontre plus celle de droite.

En résumé, tant que a supposé très petit, n'est pas

nul, x' a une valeur absolue très grande, négative ou positive, selon le signe de a ; et x'' a une valeur voisine de $-\frac{c}{b} = -$ O F ; dans chaque état de a, il y a deux racines ; enfin pour $a = o$, il n'y a plus que la solution finie $x'' = -\frac{c}{b}$; on écrit ordinairement $x' = \pm \infty$; cela ne veut pas dire que l'équation du second degré admette dans ce cas trois racines, comme le veut l'auteur d'un excellent traité d'algèbre, mais au contraire, qu'elle n'en admet qu'une ; car aucune autre valeur que $-\frac{c}{b}$, positive ou négative, si grande qu'elle soit, ne satisfait à l'équation. La droite ne rencontre la courbe qu'au point E. Le symbole $x' = \pm \infty$ ne représente qu'un résultat : la disparition de l'une des racines finies, qu'elle soit positive ou bien qu'elle soit négative.

Dans le cas particulier où b est négatif les formules sont alors

$$x' = \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad x'' = \frac{2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Elles sont positives.

Si a supposé positif décroît vers zéro, x' tend vers $\frac{c}{b}$, et x'' augmente au-delà de toute limite. Dans chaque cas, la racine qui devient infinie est celle dont la valeur absolue est la plus grande, parce que le radical et le terme rationnel sont de signes contraires au dénominateur.

92. L'hypothèse que le coefficient de x^2 est nul peut

s'appliquer à un problème remarquable. Dans le cas où b est positif, par exemple, posons $b^2 - 4ac = o$; les deux racines sont égales à $-\frac{2c}{b} = -2\,\mathrm{OF} = -\mathrm{OQ}$; les deux points communs à la courbe et à la sécante se sont rapprochés, se sont réunis en un seul T, qui est le point de contact de la tangènte passant par le point B.

Plus b sera petit plus l'abscisse O Q sera grande, et plus le point de contact sera éloigné. Par la condition $b^2 - 4ac = o$, a et b ne peuvent tendre vers zéro l'un sans l'autre. Si l'on fait $b = o$, le point Q est à l'infini ; comme a est nul, la tangente, qui passe par l'origine O, a la même direction que l'axe $o\,x'$, et se confond avec lui ; donc elle est asymptote à la courbe.

Appliquons cette méthode à l'hyperbole dont l'équation est

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

et que nous avons étudiée au n° 63.

Soit $y = mx + n$, l'équation d'une sécante.

Pour chaque point commun, on aura

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = mx + n$$

ou $$(1 - m)\,x^2 - (1 + n)\,x + 1 = o.$$

Les racines seront égales si l'on pose

$$(1 + n)^2 - 4\,(1 - m) \times 1 = o.$$

La sécante sera alors une tangente. Les coefficients m et n sont encore indéterminés, mais chacun dépend de l'autre. Exprimons que la tangente rencontre la courbe à l'infini ; la racine sera infinie si l'on a

$$a = 1 - m = o, \text{ et par suite } b = 1 + n = o$$

d'où $m = 1, n = -1.$

L'équation de la tangente à l'infini est donc

$$y = x - 1.$$

Cette droite est une asymptote. Ce résultat a été déjà trouvé plus simplement. Mais la méthode actuelle est utile pour mettre en lumière un cas remarquable de l'équation du second degré. On pourra l'appliquer aux hyperboles des n[os] 35, 66, 72, 73.

93. L'intersection de lieux géométriques rappelle un problème célèbre, la duplication du cube, qui a fait faire des progrès à la géométrie dans l'antiquité. On rapporte que l'oracle de Délos, consulté sur les moyens de faire cesser la peste d'Athènes, avait répondu : doublez l'autel d'Apollon. Or cet autel était un cube d'or. Le problème fut proposé aux géomètres et résolu de diverses manières au moyen des sections coniques.

Si a est le côté du cube primitif, il faut résoudre ou construire l'équation

$$x^3 = 2\,a^3.$$

On peut écrire

$$x^2 = \frac{2\,a^3}{x} = 2\,a \times \frac{a^2}{x}$$

Posons

$$x^2 = 2\,a\,y, \text{ et } y = \frac{a^2}{x}.$$

La première équation représente une parabole, et la seconde une hyperbole ; on peut les tracer d'une manière continue ; soient x_1 et y_1 les coordonnées de

leur point commun ; l'abscisse x_1 est le côté du cube double. On a environ $x_1 = a \times 1{,}26$.

94. Considérons les équations simultanées

$$x + y = m$$
$$a x + b y = c$$

Les énoncés de certains problèmes d'arithmétique conduisent à des équations numériques qui rentrent dans cette forme générale.

Multiplions les deux membres de la première équation par c, et ceux de la seconde par m, puis opérons la soustraction ; il vient

$$(c - a m) x + (c - b m) y = o$$

d'où

$$\frac{x}{c - m b} = \frac{y}{m a - c}.$$

Ainsi on connaît la somme de deux quantités, et on sait qu'elles sont proportionnelles à des nombres déterminés. Cette remarque fait rentrer une grande variété de problèmes dans la règle de société, c'est-à-dire, dans le partage d'une somme en parties proportionnelles à des nombres donnés. On a

$$\frac{x}{c - m b} = \frac{y}{m a - c} = \frac{x + y}{c - m b + m a - c} = \frac{m \times 1}{m (a - b)}$$

d'où

$$x = \frac{c - m b}{a - b}, \; y = \frac{m a - c}{a - b}$$

Les équations proposées représentent deux droites faciles à construire au moyen de leurs segments à l'origine. Dans le système

$$x + y = m$$
$$(a\,m - c)\,x = (c - b\,m)\,y$$

la nouvelle droite passe par l'origine des coordonnées. D'ailleurs elle passe par le point d'intersection des deux autres ; autrement on ne pourrait substituer son équation à l'une des équations primitives.

Il est peut-être bon d'exécuter les constructions graphiques sur un cas particulier, par exemple :

$$x + y = 7$$
$$2\,x + 3\,y = 12.$$

On peut appliquer cette méthode symétrique et élégante à la résolution des équations du premier degré à deux inconnues.

$$a\,x + b\,y = c$$
$$a'\,x + b'\,y = c'$$

En effet, on a

$$(a\,c' - c\,a')\,x + (b\,c' - c\,b')\,y = o$$

d'où

$$\frac{x}{c\,b' - b\,c'} = \frac{y}{a\,c' - c\,a'} = \frac{a\,x}{a\,(c\,b' - b\,c')} = \frac{b\,y}{b\,(a\,c' - c\,a')}$$

On a donc

$$\frac{x}{c\,b' - b\,c'} = \frac{y}{a\,c' - c\,a'} = \frac{a\,x + b\,y}{a\,c\,b' - b\,c\,a'} = \frac{1}{a\,b' - b\,a'}$$

et enfin

$$x = \frac{c\,b' - b\,c'}{a\,b' - b\,a'}\,,\; y = \frac{a\,c' - c\,a'}{a\,b' - b\,a'}$$

CHAPITRE XI.

COURBE LOGARITHMIQUE.

95. Considérons les deux progressions

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 & b^6 \ldots\ldots\ldots & b^p \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots\ldots\ldots & p \ldots. \end{array}$$

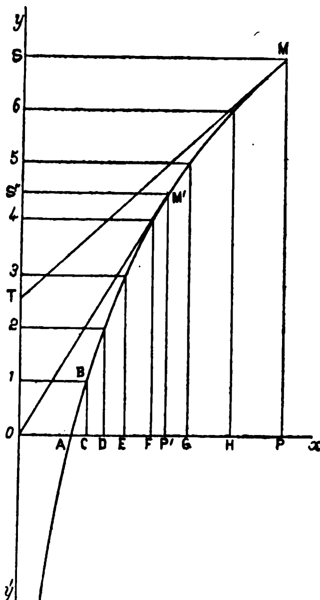
l'une géométrique, commençant par l'unité et dont la raison est b ; l'autre arithmétique commençant par zéro, et dont la raison est ici égale à l'unité pour plus de simplicité. On dit que les termes de la progression arithmétique sont respectivement les logarithmes des termes de la progression géométrique. Ainsi le logarithme de b^p est p ; c'est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base b, dont le logarithme est l'unité, pour obtenir le nombre b^p. De même le logarithme de b^q est q. Or $b^p \times b^q = b^{p+q}$; le logarithme du produit de deux facteurs est donc égal à la somme des logarithmes de ces facteurs. On sait que les propriétés fondamentales des logarithmes se tirent de ce principe.

L'Ecossais Néper a fait connaître les logarithmes en 1614.

La courbe logarithmique, introduite dans la science par Huygens, a pour équation

$$y = \log. x\,.$$

Il s'agit de la construire.



Pour $x = 1 = o\,A$, $y = o$

La courbe passe par le point A, quelle que soit la base b.

Soit $b = 1{,}25 = o\,c$, et $y = 1 = C\,B$.

On prendra sur $o\,y$ pour représenter les nombres entiers, des longueurs 01, 02, 03..... et l'on fera

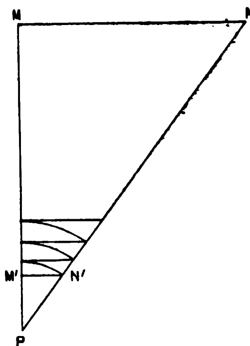
$$O\,C = 1{,}25 = \frac{5}{4}$$

$$O\,D = 1{,}25^2$$

$$O\,E = 1{,}25^3$$

....

On peut trouver ces longueurs par un procédé très simple. Si l'on construit un triangle rectangle M N P



dont les côtés sont entre eux comme les nombres 3, 4, et 5, toute parallèle M′ N′ au plus petit côté M N, déterminera des longueurs P N′ et P M′ qui seront dans le rapport de 5 à 4 ; par exemple, si P M′ = O C, on aura P N′ = O D ; et ainsi de suite.

Les points C, D, E, F, G, ... sont les pieds des ordonnées éga-

les aux nombres entiers 1, 2, 3, etc.... Les sommets des rectangles seront des points de la courbe.

Ici la base est $1 + 0{,}25$. En général, si elle est $1 + \alpha$, en l'élevant à une puissance d'un degré suffisant, on obtient un nombre aussi grand que l'on veut. En effet ; on a

$$(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$$
$$(1 + \alpha)^3 = 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \ldots$$

et par analogie :

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \ldots\ldots$$

On peut donc écrire :

$$(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$$

Posons $1 + n\alpha > \mathrm{N}$

ou bien $n > \dfrac{\mathrm{N} - 1}{\alpha}$

On peut toujours satisfaire à cette inégalité si grand que soit N, et si petit que soit α.

Donc on aura $\mathrm{N} < 1 + n\alpha < (1 + \alpha)^n$.

Si N est un nombre très grand, n sera lui-même un nombre extrêmement grand.

Si dans la fonction $y = \log. x$, on fait $x = \infty$, on a $y = \infty$.

On a $\dfrac{1}{b^n} = b^{-n}$

Le logarithme de la fraction $\dfrac{1}{b^n}$ est négatif.

Pour une valeur absolue de n très grande, la fraction est très petite. Pour $n = \infty$, la fraction est nulle. Si dans $y = \log. x$, on fait $x = o$, on a $y = -\infty$. La droite $o\,y'$ est asymptote à la courbe.

Jusqu'ici, dans le dessin de la logarithmique, les valeurs de y sont entières. Mais on peut trouver des points intermédiaires. Soient en effet deux nombres b^m et b^n dont les logarithmes sont m et n. Leur moyenne géométrique est $\sqrt{b^m \times b^n} = \sqrt{b^{m+n}} = b^{\frac{m+n}{2}}$.

Le logarithme du nouveau nombre est $\frac{m+n}{2}$, c'est-à-dire, la moyenne arithmétique des deux logarithmes dans le même système dont la base est b. En traitant de même b^m et le nouveau terme, et ainsi de suite, on rendra la courbe de plus en plus continue. Si O P est un nombre particulier, M P sera son logarithme. Par exemple, le logarithme du nombre 2,71828... est 4,48 = M′ P′, dans notre système dont la base est 1,25. Le nombre e, égal à 2,71828... est la base des logarithmes népériens. Chose remarquable, si on dessine avec soin la tangente M T à la courbe logarithmique en un point quelconque, sa projection S T sur l'axe $o\,y$, est égale à 4,48 = M′ P′, c'est-à-dire, au logarithme du nombre e, pris dans le système actuel de logarithmes. Aussi, la tangente au point M′ a-t-elle pour sous-tangente une droite O S′ égale à M′ P′, logarithme de e.

Si la base b, représentée par O C, reçoit une autre valeur que 1,25, la courbe se déforme plus ou moins, en passant toujours par le point A, et en restant asymptote à l'axe $o\,y'$. La sous-tangente est égale au nouveau logarithme de e. C'est la base adoptée qui caractérise un système de logarithmes. Dans la théorie ou dans la pratique, on emploie deux systèmes importants. Les logarithmes vulgaires ou de Briggs, ont pour base 10, ce qui simplifie les calculs numériques. Dans le

système du premier inventeur, la base est le nombre

$$e = 2{,}7182818284\ldots\ldots$$

Néper a pris les deux progressions

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1+\alpha & (1+\alpha)^2 & (1+\alpha)^3 & \ldots\ldots (1+\alpha)^p \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha\ldots\ldots\ldots & p\alpha\ldots\ldots \end{array}$$

Il voulait, pour la simplicité, que la différence entre les deux premiers termes de la progression géométrique, fût égale à l'accroissement constant α du logarithme ; tel est le caractère de son système. Sans le savoir, il a provoqué de belles découvertes en analyse. On peut aisément s'en faire une idée.

Soit $(1+\alpha)^p = b$, et par suite $p\alpha = 1$ d'où $\alpha = \frac{1}{p}\cdot$ On aura $b = \left(1+\frac{1}{p}\right)^p\cdot$

Pour la continuité, on supposera α infiniment petit, ou p infiniment grand. On aura $b =$ limite de $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ lorsque p augmente au-delà de toute limite. Euler a démontré que cette limite a pour valeur celle de la série convergente

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \cdots = 2{,}7182818284$$

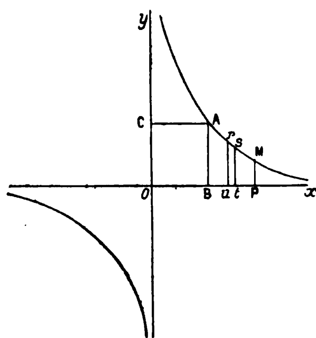
Sans connaître cette théorie, si dans l'expression $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$ on donne à p des valeurs croissantes, on vérifie que la valeur de la puissance augmente en se rapprochant de celle de e.

On peut s'en rendre compte au moyen du tableau suivant :

Valeurs de p.	Valeurs de $\left(1+\frac{1}{p}\right)^p$
1	2
10	2,593
100	2,705
1000	2,713
10000	2,718
.....	.....

96. Les logarithmes népériens sont encore appelés hyperboliques. Voici pourquoi.

Reprenons l'équation de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.



On démontre que l'aire A B P M, désignée par A, comprise entre la courbe, l'axe des x, l'ordonnée du sommet, et une ordonnée quelconque M P, est égale au logarithme népérien de l'abscisse O P.

Considérons une suite de valeurs en progression géométrique

(1) $$1 \quad q \quad q^2 \quad q^3 \ldots . \, q^p \ldots . \, q^n$$

O B étant la première, et O P la dernière.

Les valeurs correspondantes de y seront leurs inverses

$$1 \quad \frac{1}{q} \quad \frac{1}{q^2} \quad \frac{1}{q^3} \ldots \quad \frac{1}{q^p} \ldots \quad \frac{1}{q^n}$$

Entre deux ordonnées consécutives de cette série, la

courbe et l'axe des x, est compris un petit trapèze $r\,s\,t\,u$ dont la surface diffère peu d'un rectangle ayant pour hauteur $\frac{1}{q^p}$, et pour base $q^{p+1} - q^p$; ce rectangle est égal à $\frac{q^{p+1} - q^p}{q^p} = q - 1$. Tous les rectangles analogues sont donc égaux; or leur nombre est n; leur somme est donc $S = n(q - 1)$. Il faut remarquer que cette somme S est inférieure à l'aire A, et pourra en différer d'aussi peu que l'on voudra.

Si l'on fait successivement $n = 0, 1, 2, 3, \ldots p \ldots n$, on obtient pour les valeurs de S une suite de termes en progression arithmétique

$$(^2)\ o \quad q-1 \quad 2(q-1) \quad 3(q-1) \ldots p(q-1) \ldots n(q-1)$$

Les deux séries (¹) et (²) forment un système de logarithmes; or le premier accroissement $q - 1$ des nombres est égal à la raison constante des logarithmes comme le voulait Néper; si d'ailleurs q est très voisin de l'unité, la base est très voisine de celle des logarithmes népériens. En désignant cette base par b, soit $b = q^p$, ce qui donne pour le logarithme de ce terme $p(q - 1) = 1$; on en tire $q = 1 + \frac{1}{p}$, et par suite $b = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p$. Pour obtenir l'aire A, ou A B P M qui est la limite de la somme des petits rectangles, on fait $p = \infty$, ce qui donne limite de

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right)^p = e = 2{,}7182818284\ldots..$$

On a bien la base des logarithmes népériens.

Le terme $n(q-1)$, qui correspond à l'abscisse O P égale à q^n, a pour limite A ; cette aire est donc le logarithme de l'abscisse O P.

La connaissance de cette belle propriété est due à Grégoire de Saint-Vincent.

97. On sait que la formule des intérêts composés est

$$A = a(1+r)^n$$

a étant le capital primitif placé pour n années, r la rente annuelle de 1 fr., A la valeur finale du capital avec les intérêts accumulés.

Posons $\frac{A}{a} = 2$, $r = 0{,}05$, $n = y$

on aura $2 = (1{,}05)^y$

y indiquera au bout de combien d'années un capital sera doublé à 5 0/0.

En passant aux logarithmes vulgaires, on a

$$\log.\ 2 = y.\ \log.\ 1{,}05$$

d'où

$$y = \frac{\log.\ 2}{\log.\ 1{,}05} = \frac{0{,}3010300}{0{,}0211893}$$

y est le logarithme de 2 dans le système dont la base serait 1,05. Dans notre calcul, y est égal au logarithme vulgaire de 2 multiplié par la valeur inverse du logarithme vulgaire de cette base : l'opération revient à passer du système de Briggs, au système dont la base est 1,05 et dont la courbe a pour équation

$$x = 1{,}05^y$$

ou

$$y = \log.\ x$$

Le nombre x étant le rapport $\frac{A}{a}$. La résolution de l'équation exponentielle $2 = 1{,}05^y$
donne $y = 14{,}2067 = 14^{ans}\ 2^{mois}\ 14^{j},4$.

Mais il faut remarquer que l'équation ne convient que pour les nombres entiers, les intérêts n'étant capitalisés qu'à la fin de chaque année.

Dans le courant d'une même année, les accroissements du temps, qui sont proportionnels aux accroissements d'intérêts, doivent se terminer à la corde de la logarithmique, et non à l'arc lui-même.

Soit $A = 1{,}05^{14} = 1{,}97993$

$$2 - A = 0{,}02007$$

C'est l'accroissement du nombre, ou du capital.

Il faut 73 jours pour que A rapporte cette différence à 5 0/0. Le capital est donc doublé au bout de 14^{ans} 2^{mois} 13^{jours}. On peut trouver la fraction d'année F de la manière suivante :

On a

$$2 = 1{,}05^{14}\,(1 + 0{,}05\ F)$$

$$\log.\ 2 = (\log.\ 1{,}05) \times 14 + \log.\ (1 + 0{,}05\ F)$$

Supposons qu'on ait trouvé 14 par la simple division de 0,30103 par 0,0211893, et que le reste soit 0,0043798. Si on exprime que le dividende est égal au diviseur multiplié par le quotient + le reste, on a

$$\log.\ 2 = \log.\ (1{,}05) \times 14 + 0{,}0043798$$

En comparant les deux égalités, on obtient

$$\log.\ (1 + 0{,}05\ F) = 0{,}0043798 = \log.\ 1{,}010136$$

et par suite

$$1 + 0,05\,F = 1,010136$$

on a donc

$$F = \frac{0,010136}{0,05} = 0,20271 = 2^{mois}\ 13^{jours}.$$

CHAPITRE XII.

COURBES QUI FIGURENT LA SOMME DES PUISSANCES DES NOMBRES ENTIERS.

98. Considérons les trois fonctions suivantes :

$$(^1) \qquad y = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$(^2) \qquad y = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

$$(^3) \qquad y = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

Si l'on désigne par x le dernier de la suite des nombres entiers 1 2 3 4 ..... x, on démontre que la fonction (^{1}) est égale à la somme de ces nombres, que la fonction (^{2}) représente la somme de leurs carrés, et la fonction (^{3}) celle de leurs cubes.

Par exemple, si sur ox, on prend à partir de l'origine des longueurs multiples de l'unité, et qui représentent les nombres 1 2 3 4 ..... ; si à l'extrémité de chaque longueur on élève une perpendiculaire égale à la somme des nombres dont cette abscisse est le dernier, l'extrémité de la perpendiculaire sera sur une parabole, dont on connaîtra ainsi différents points.

99. On peut d'ailleurs construire les courbes exprimées par les trois équations en supposant que x et y varient d'une manière continue, et ne soient pas né-

cessairement des nombres entiers ; les courbes ont alors une signification plus générale.

Soit d'abord la fonction (1)

$$y = \frac{x(x+1)}{2}$$

Pour $x = o$, $y = o$. La courbe passe à l'origine.

Pour $x = -1 = -o$ A, $y = o$.

La courbe passe en A.

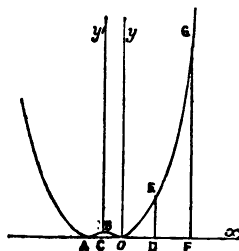
Pour $x = -\frac{1}{2} = -$ O C, $y = -\frac{1}{8} = -$ C B

ce qui donne le sommet B.

Pour $x = 1 =$ O D, $y = 1 =$ D E.
Pour $x = 2 =$ O F, $y = 3 =$ F G.
Pour $x = \pm \infty$, $y = + \infty$.

L'arc O E G.... appartient seul à la question de la somme des nombres ; il faut faire une autre restriction : pour qu'une ordonnée représente une somme d'abscisses, il faut que ces abscisses soient des nombres entiers.

100. Considérons en second lieu la fonction (2) qui est le carré de la première.



$$y = \frac{x^2 (x+1)^2}{4}$$

y est encore nul pour $x = o$, et pour $x = -1 = -o$ A, ce qui donne les points O et A qui correspondent à des minimums.

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on a le maximum $\frac{1}{64}$; car l'ordonnée qui était négative dans l'équation ([1]), devient ici positive à cause du carré. La courbe ne peut descendre au-dessous de l'axe des x pour la même raison; elle lui est tangente en O et en A.

Pour $x = 1 = \text{O D}$, $y = 1 = \text{D E}$
Pour $x = 2 = \text{O F}$, $y = 9 = \text{F G}$
Pour $x = \pm \infty$, $y = + \infty$.

L'arc O E G... appartient à la question de la somme des cubes, par ses coordonnées entières.

L'équation de cette courbe est de la même espèce que l'équation bicarrée étudiée au n° 62. Il est aisé de le démontrer en déplaçant l'axe des abscisses. Soit C D $= x'$, la nouvelle origine étant en C.

On aura $x' = x + \frac{1}{2}$ ou $x = x' - \frac{1}{2}$; d'où

$$y = \frac{\left(x' - \frac{1}{2}\right)^2 \left(x' + \frac{1}{2}\right)^2}{4} = \frac{x'^4}{4} - \frac{x'^2}{8} + \frac{1}{64} = \frac{\left(x'^2 - \frac{1}{4}\right)^2}{4}$$

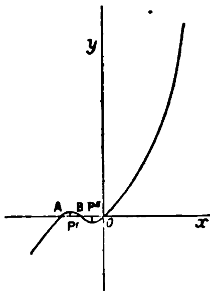
L'équation est bicarrée. Ici les racines sont égales deux à deux, et la courbe est tangente à l'axe des abscisses en A et en O.

101. Soit enfin l'équation ([2])

$$y = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

Elle représente la somme des carrés des nombres entiers. Archimède a trouvé la règle exprimée par cette équation en cherchant la quadrature de sa spirale. On peut employer la même formule pour calculer les piles

de boulets, le volume de la pyramide ou du cône, pour carrer la parabole, etc.



Pour $x = o$, $y = o$

Pour $x = -1 = -$ O A, $y = o$

Pour $x = -\frac{1}{2} = -$ O B, $y = o$

Pour $x = +\infty$, $y = +\infty$

Pour $x = -\infty$, $y = -\infty$.

Par la méthode de Fermat, on trouve l'équation $x^2 + x + \frac{1}{6} = o$.

Les racines sont les abscisses des points maximum et minimum.

Pour $x' = \frac{-3 - \sqrt{3}}{6} = -$ O P′, on a le maximum.

Pour $x'' = \frac{-3 + \sqrt{3}}{6} = -$ O P″, on a le minimum.

102. Il peut paraître intéressant de trouver ici la démonstration des formules qui donnent la somme des carrés et des cubes des nombres entiers.

Cette question va être traitée de trois manières différentes.

Méthode des nombres impairs :

On peut écrire :

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + 2n - 1.$$

On sait que la somme des n premiers nombres im-

pairs est égale au carré de leur nombre n. Ce principe est appliqué dans chaque ligne horizontale. Désignons par $\int_1$ la somme des n premiers nombres entiers, et par $\int_2$ la somme de leurs carrés. Si dans le tableau on ajoute les termes par colonnes verticales, on aura successivement.

$$\int_2 = 1 \times n + 3(n-1) + 5(n-2) \cdots + (2n-1)[n-(n-1)]$$

$$\int_2 = \begin{cases} n(1+3+5+\cdots+2n-1) \\ -[3\times 1 + 5\times 2 + 7\times 3 + \cdots (2n-1)(n-1)] \end{cases}$$

$$\int_2 = \begin{cases} n \cdot n^2 \\ -[(2+1)1+(4+1)2+(6+1)3+\cdots(2n-2+1)(n-1)] \end{cases}$$

$$\int_2 = \begin{cases} n \cdot n^2 \\ -(\int_1 - n) \\ -2[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2] \end{cases}$$

$$\int_2 = n \cdot n^2 - (\int_1 - n) - 2(\int_2 - n^2)$$

$$3\int_2 = n \cdot n^2 + n + 2n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3\int_2 = n(n^2+2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3\int_2 = n(n+1)\left(n+1-\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\int_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

103. En considérant les nombres impairs on arrive de même à la somme des cubes des nombres entiers.

1	1	1
2	$3+5$	2^3
3	$7+9+11$	3^3
4	$13+15+17+19$	4^3
⋮		
p	. . . .	p^3

Dans ce tableau, on a disposé les n nombres impairs par groupes horizontaux renfermant respectivement un nombre de termes marqué par 1, 2, 3,.... p ; on aura $n = 1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Soit $\int$ la somme des termes contenus dans la dernière ligne horizontale.

On aura

$$\int = n^2 - (n-p)^2 = 2np - p^2$$

et d'après la valeur de n :

$$\int = \frac{2p \cdot p(p+1)}{2} - p^2 = p^2(p+1) - p^2 = p^3$$

Voilà l'expression générale de la somme des termes de chaque ligne horizontale. Or la somme des nombres impairs est n^2.

On aura donc

$$n^2 = 1 + 2^3 + 3^3 + \cdots p^3$$

$$\left[\frac{p(p+1)}{2}\right]^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots p^3$$

On a donc enfin $\int_3 = (\int_1)^2$.

104. Méthode des coefficients indéterminés.

Cette méthode, entrevue par Viète (n° 44), a été

surtout développée par Descartes. Voici en quoi elle consiste souvent. On établit d'abord la forme de la fonction inconnue, présentant dans ses termes des coefficients encore indéterminés ; puis on cherche deux expressions différentes d'un même état de la fonction ; si on les identifie en égalant deux à deux les multiplicateurs des mêmes puissances de la variable, on obtient les équations qui déterminent les valeurs particulières des divers coefficients.

105. Lorsqu'une fonction est du troisième degré, elle contient un terme $A\,x^3$. Si x augmente d'une unité, l'accroissement de x^3 est $(x+1)^3 - x^3$, c'est-à-dire, $3\,x^2 + 3\,x + 1$; cet accroissement est donc du second degré.

On peut écrire

$$(x+1)^2 - x^2 = 2\,x + 1$$
$$(x+1)^3 - x^3 = 3\,x^2 + 3\,x + 1$$
$$(x+1)^4 - x^4 = 4\,x^3 + 6\,x^2 + 4\,x + 1.$$

Le degré de l'accroissement d'un terme est inférieur d'une unité au degré de ce terme ; et il en sera de même d'une fonction composée de plusieurs termes algébriques. Le degré de cette fonction surpasse d'une unité le degré de son accroissement.

106. La fonction de x qui donne la somme des carrés doit être du troisième degré, car son accroissement, lorsque le nombre entier augmente d'une unité, est $(x+1)^2$, c'est-à-dire du second degré. Elle sera de la forme

$$A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x.$$

Les coefficients indéterminés sont A, B et C.

La fonction n'aura pas de terme constant, car pour $x = o$, elle doit être nulle. Il faut exprimer que si on lui ajoute $(x + 1)^2$, on aura l'état de la fonction lorsque la série des nombres est terminée par $x + 1$. On aura l'idendité

$$Ax^3+Bx^2+Cx+(x+1)^2=A(x+1)^3+B(x+1)^2+C(x+1)$$

En effectuant les calculs et les réductions, on obtient $x^2 + 2x + 1 = 3Ax^2 + (3A + 2B)x + A + B + C.$

On identifie les deux membres de l'égalité en posant

$$3A = 1$$
$$3A + 2B = 2$$
$$A + B + C = 1$$

ce qui donne

$$A = \frac{1}{3}, \ B = \frac{1}{2}, \ C = \frac{1}{6}$$

et par suite

$$\int_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} = \frac{x}{6}(2x^2 + 3x + 1)$$

$$\int_2 = \frac{x}{6}(2x^2 + 2x + x + 1) = \frac{x}{6}(x+1)(2x+1).$$

107. La fonction qui exprime la somme des cubes ayant pour accroissement $(x + 1)^3$ qui est du troisième degré, doit être du quatrième. Elle sera de la forme $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$.

Elle n'aura pas non plus de terme constant ou indépendant de x, qui l'empêcherait d'être nulle pour $x = o$. On aura

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + (x + 1)^3$$
$$= A(x + 1)^4 + B(x + 1)^3 + C(x + 1)^2 + D(x + 1)$$

Si l'on effectue les calculs indiqués, puis les réductions, on obtient

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = \left\{ \begin{array}{l} 4\,A\,x^3 + (3\,B + 6\,A)\,x^2 \\ + (2\,C + 3\,B + 4\,A)\,x \\ + A + B + C + D \end{array} \right.$$

En identifiant les termes de même degré, on a pour déterminer les coefficients les quatre équations.

$$\begin{aligned} 1 &= 4\,A \\ 3 &= 3\,B + 6\,A \\ 3 &= 2\,C + 3\,B + 4\,A \\ 1 &= A + B + C + D \end{aligned}$$

Elles donnent

$$A = \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{4}$$

$$D = 0$$

On a donc

$$\int_3 = \frac{x^4}{4} + \frac{2\,x^3}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(x^2 + 2x + 1)$$

$$= \frac{x^2\,(x+1)^2}{4} = (\int_1)^2.$$

108. Nous ne rappellerons pas la méthode des traités d'algèbre. Mais voici un théorème qui permet de vérifier par la synthèse les formules précédentes, et même de les trouver par l'analyse.

Supposons qu'une fonction F (n) soit telle que la dif-

férence $F(n) - F(n-1)$ soit égale à une autre fonction $f(n)$, et que de plus $F(o)$ soit nul, ce qui aura lieu si la fonction est multiple de n ; on aura

$$F(n) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

C'est-à-dire, la fonction $F(n)$ sera la somme des n quantités qu'on obtient en introduisant successivement les nombres entiers depuis 1 jusqu'à n, dans la seconde fonction $f(n)$.

En effet, par hypothèse, on a

$$F(n) - F(n-1) = f(n)$$

On peut donc écrire :

$$\begin{array}{l} F(1) - F(o) = f(1) \\ F(2) - F(1) = f(2) \\ F(3) - F(2) = f(3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(n) - F(n-1) = f(n) \end{array}$$

Si on ajoute ces égalités membre à membre, en effectuant les réductions évidentes, on obtient

$$F(n) - F(o) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots\cdots + f(n)$$

Or par hypothèse, $F(o) = o$.

Il suffit d'effacer ce terme pour achever la démonstration du théorème.

On a donc enfin

$$F(n) = \Sigma_1^n f(n)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Venons aux applications.

109. Commençons par la vérification des formules.

1° Soit $F(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(n+1-n+1) = n$$

Donc

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 \cdots + n = \int_1$$

2° Soit $F(n) = n^2$

$$n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 = f(n).$$

Donc $n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots\cdots + 2n - 1$.

La somme des n premiers nombres impairs est donc égale au carré de n.

3° Soit $F(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.

On aura successivement :

$$F(n) - F(n-1)$$
$$= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} - \frac{(n-1)^3}{3} - \frac{(n-1)^2}{2} - \frac{n-1}{6}$$
$$= \frac{3n^2 - 3n + 1}{3} + \frac{2n-1}{2} + \frac{1}{6}$$
$$= n^2 - n + \frac{1}{3} + n - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$
$$= n^2.$$

On a donc :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \int_2$$

4° Soit $F(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$F(n) - F(n-1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = n^3$$

On a donc :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

ou $(\int_1)^2 = \int_3$.

110. Supposons maintenant qu'on cherche les formules sans les connaître, ou sans se les rappeler.

Soit $F(n) = n^m$.

On développera la différence $n^m - (n-1)^m$ dans chaque cas particulier où m prendra successivement les valeurs 2, 3, 4, etc. ; ce qui fera connaître la fonction $f(n)$.

1° Soit $m = 2$, ou $F(n) = n^2$.

On a $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$

donc n^2 est la somme des n premiers nombres impairs.

2° Le résultat peut encore s'interprêter autrement.

On a ici $F(n) = n^2$, et $f(n) = 2n - 1$.

On aura donc :

$$\begin{aligned} n^2 = \; & 1 \times 2 - 1 \\ & + 2 \times 2 - 1 \\ & + 3 \times 2 - 1 \\ & + 4 \times 2 - 1 \\ & \cdots\cdots \\ & \cdots\cdots \\ & + n \times 2 - 1 \end{aligned}$$

On a donc

$$n^2 = 2\int_1 - n$$

d'où $$2\int_1 = n(n+1)$$

et par suite $$\int_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3° Soit $F(n) = n^3$.

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

On a donc

$$\begin{aligned} n^3 = \quad & 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 \\ & + 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 1 \\ & + 3 \times 3^2 - 3 \times 3 + 1 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + 3 \times n^2 - 3 \times n + 1 \end{aligned}$$

et par suite

$$n^3 = 3\int_2 - 3\int_1 + n$$

$$3\int_2 = n^3 - n + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(2n^2 + 3n + 1)$$

$$\int_2 = \frac{n}{6}(2n^2 + 2n + n + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4° Soit $F(n) = n^4$.

$$n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = f(n).$$

En appliquant le théorème et en ajoutant les n valeurs de la fonction $f(n)$, on obtient :

$$n^4 = 4\int_3 - 6\int_2 + 4\int_1 - n$$

et par suite

$$4\int_3 = n^4 + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n$$

d'où

$$\int_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\int_1)^2.$$

111. La lecture de ce qui précède sera une bonne préparation à l'étude de la géométrie analytique et de la deuxième partie de l'algèbre, dont la connaissance est exigée des candidats à l'Ecole polytechnique ou à l'E-

cole normale supérieure et nécessaire aux auditeurs des facultés des sciences. Lorsque Descartes, en 1637, jeta sur le papier les principes de sa nouvelle géométrie, il ne songea guère à la rendre claire et accessible pour ses contemporains. « Les inventeurs, a dit Dalembert, ne dédaignent pas l'obscurité. » Descartes en fait lui-même l'aveu, non sans témérité, lorsqu'il termine la rapide exposition de ses découvertes par ces fières paroles : « J'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer. »

FIN.

AUTEURS CITÉS.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

CHAPITRE XII.

VITRY-LE-FRANÇOIS, TYP. PESSEZ ET Cie.



